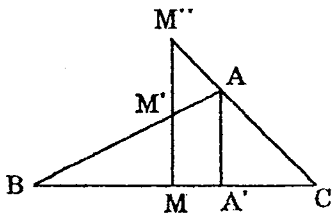
FLORENTIN SMARANDACHE

PROPOSED PROBLEMS
of Mathematics

(Vol.II)



Chişinău - 1997

UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA
CATEDRA DE ALGEBRĂ

FLORENTIN SMARANDACHE

PROPOSED PROBLEMS
of Mathematics

(Vol.II)

Chișinău - 1997

FLORENTIN SMARANDACHE
University of New Mexico
Department of Mathematics
Gallup, NM 87301, USA

PROPOSED PROBLEMS of Mathematics (Vol.II), Chişinău: U.S.M., 1997 - 101p.

Cuvânt înainte

Prima culegere de "Problèmes avec et sans ... problèmes!" a apărut în Maroc în 1983.

Am strâns aceste proleme, apărute prin diverse reviste românești sau străine (printre care: "Gazeta Matematică", revistă la care m-am format ca problemist, "American Mathematical Monthly", "Crux Mathematicorum" (Canada), "Elemente der Mathematik" (Elveția), "Gaceta Matematica" (Spania), "Nieuw voor Archief" (Olanda), etc.) ori inedite într-un al doilea volum.

Create în perioade diferite: când lucram ca profesor de matematică în România (1984-1988), sau profesor cooperant în Maroc (1982-1984), sau emigrant în SUA (1990-1997), le-am lăsat în limbile respective (cam o treime în română, o treime în franceză, și o treime în engleză) pentru a cuprinde și cititori străini.

Mulțumesc Catedrei de Algebră a Universității de Stat din Moldova pentru publicarea acestei cărți.

Autorul

PROBLEME DISTRACTIVE

1) Pe un gard sunt 10 ciori. Un vînător împușcă 3. Cîte au mai rămas?

(Răspuns: Nici una, deoarece cele 3 moarte au căzut jos iar celelalte 7 au zburat!)

2) Pe un islaz sunt 10 ciori. Un vînător împușcă 3. Cîte au mai rămas?

(Răspuns: Trei, cele moarte, deoarece celelalte 7 au zburat!)

3) Într-o colivie sunt 10 ciori. Un vînător împușcă 3. Cîte au mai rămas?

(Răspuns: Zece, atît cele moarte cît și cele vii, deoarece nu pot ieși din colivie!)

4) Pe cer zboară 10 ciori. Un vînător împușcă 3. Cîte au mai rămas?

(Răspuns: Șapte, în sfîrșit(!), cele care zboară încă, deoarece cele moarte au căzut jos!)

["Magazin",Bucuresti]

PROBLEME DE AMUZAMENT

Fie ABC un triunghi.

1. Să se afle aria bisectoarei unghiului A.

2. Să se determine lungimea centrului de intersecție al bisectoarelor.

Soluții:

1. Aria =0.

2. Lungimea =0.

MATEMATICIENI PE TERENUL DE FOTBAL

Într-o grupă de patru echipe de fotbal după terminarea turului, clasamentul arată astfel:

1.Echipa A	3	1	2	0	3-1	4p
2.Echipa B	3	1	2	0	4-3	4p
3.Echipa C	3	0	3	0	2-2	3p
4.Echipa D	3	0	1	2	0-3	1p

Aflați rezultatele tuturor meciurilor disputate în această grupă (deducere logică).

Soluție.

Stabilim pronosticurile exacte:

C are numai meciuri nule: C-A=X, C-B=X, C-D=X.

Echipa D mai are două înfrîngeri: A-D=1, B-D=1.

Meciul rămas A-B=X deoarece ambele echipe sînt neînvinse.

A are+2 golaveraj, deci A-D=2-0(și nu 3-1 gentru că D nu a marcat nici un gol). Analog B-D=1-0, de unde C-D=A-0. Eliminînd aceste rezultate putem forma un clasament ad-hoc

A	2	0	2	0	1-1	2
B	2	0	2	0	3-3	2
C	2	0	2	0	2-2	2

Atunci A-B= $\left\langle \begin{matrix} 0\text{-}0 \\ 1\text{-}1 \end{matrix} \right.$ sau, rezultă A-C $\left\langle \begin{matrix} 1\text{-}1 \\ 0\text{-}0 \end{matrix} \right.$ sau,

rezultă mai departe B-C= $\left\langle \begin{matrix} 3\text{-}3 \\ 2\text{-}2 \end{matrix} \right.$ sau respectiv.

Dar B-C≠3-3 deoarece C a marcat cel mult 2 goluri. Prima variantă cade, mai rămîne doar:

A-B=1-1, A-C=0-0, B-C=2-2 (soluție unică).

["Gazeta Matematică"]

PROBLEMĂ PROPUSĂ

Trei echipe A,B,C de volei au participat la un turneu. Cunoscînd clasamentul:

1.	A	2	1	1	5	3	3p
2.	B	2	1	1	4	5	3p
3.	C	2	1	1	3	4	2p

după desfășurarea tuturor meciurilor, aflați rezultatele înregistrate.

PROBLEMĂ DE LOGICĂ

Patru persoane A,B,C și D sunt chemate în judecată.

La întrebarea "Cine este vinovat?" fiecare din ei răspunde:

A: Nu sunt eu vinovat.

B: Vinovat este C.

C: Vinovat este D.

D: Nu este adevărat ce spune C.

Știind că doar o singură persoană a răspuns adevărat, cine este vinovatul?

(Răspuns: A)

UNDE ESTE GREȘEALA?

Persoana X și-a luat concediul de odihnă de 20 de zile lucrătoare începînd cu data de 10 decembrie 1980 inclusiv (miercuri) (zilele nelucrătoare fiind duminicele, respectiv 1 și 2 ianuarie 1981). Între timp, prin decret de stat se declară ziua de 3 ianuarie 1981 zi liberă, lucrîndu-se pentru ea pe data de 18 ianuarie 1981. Persoana X vine pe 5 ianuarie la lucru și lucrează și pe 18 ianuarie (duminică). Cîte zile din concediul de odihnă sau recuperare mai are de luat X?.

Soluție. 26 zile - 6 sărbători =20 zile lucrătoare. Deoarece 3 ianuarie a fost declarată liberă, rezultă că X a efectuat doar 19 zile lucrătoare din concediul de odihnă, deci mai are de luat o zi din concediul de odihnă. Lucrînd și duminică, 18 ianuarie, el mai are de luat încă o zi (de recuperare pentru această duminică). Deci X mai are 2 zile de luat.

Unde este greșeala?

TEST: Ecuații și sisteme liniare, clasa a VII-a

Să se rezolve următoarele ecuații și sisteme liniare:

1) $2x - 5 = 2 - 5x$

2) $-6x + 7y = 8$

3) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{4} \\[2ex] \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{5} \end{cases}$

a) metoda substituției
b) metoda reducerii
c) metoda grafică

4) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 0 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} -15x+25y=35 \\ 3x - 5y=-7 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 4 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = 5 \end{cases}$

7) Cîte probleme de matematică au rezolvat Ionescu și Popescu, din manualul de algebră de clasa a VII-a, știind că: dacă Ionescu ar mai fi rezolvat încă cinci probleme l-ar fi ajuns pe Popescu, iar dacă Popescu ar mai fi rezolvat încă cinci l-ar fi depășit de trei ori pe Ionescu.

8) $mx+y=0$, $x+my=1$. Discuție.

TEST, Geometrie, patrulatere, cls.VII-a

1) Să se afle unghurile unui romb știind că latura este de 4 cm iar aria $8\sqrt{2}$ cm^2.

2) Se dă un paralelogram avînd laturile de 6 cm și respectiv 8 cm, iar înălțimea 5 cm. Să se determine unghiurile paralelogramului ca și unghiul format de înălțime cu o diagonală, și unghiul format de diagonale între ele.

3) Să se arăte că aria unui romb este mai mică decît aria unui patrat avînd aceeași latură.

4) Cîte cercuri de rază 1 cm, cel mult, tangente între ele două cîte două (sau tangente la drepte) pot fi introduse într-un patrat cu latura de 10 cm? Dar triunghiuri dreptunghice isoscele cu cateta de 1 cm (care să aibă cel mult o latură în comun)?

CLASA A V-A

Orice număr natural mai mare ca 3 se poate scrie ca o sumă de numere prime.

CLASA A VI-A

a) Orice mulțime inclusă în N are minim? b) Orice mulțime inclusă în $Z \setminus N$ are maxim?Generalizați.c) Găsiți trei mulțimi A, B și C astfel ca $C \subset A$, $C \subset B$ și $C \subset A \setminus B$.

CLASA A VII-A

Ce număr mai mic decît 100, fiind împărțit la 4 dă restul $r_1=1$ și împărțit la 13 dă restul $r_2=1$?

CLASA A VIII-A

Să se afle numerele care împărțite la 52 dau cîtul 3 și restul $r_1 > 1$ și împărțite la 43 dau tot cîtul 3 și restul r_2.

Soluții:

<u>CLASA A V-A</u>: Dacă numărul n este par, atunci $n=2k$, $k \geqslant 2$, și el se scrie: $\underbrace{n=2+2+\ldots+2}_{\text{de } k \text{ ori}}$. Dacă n este impar, rezultă $n=2k+1$, $k \geqslant 2$, și se scrie: $\underbrace{n=3+2+2\ldots+2}_{\text{de } k \text{ ori}}$

(De fiecare dată $k \geqslant 2$, deoarece $n > 3$.)

<u>CLASA A VI-A</u>: a) Nu orice mulțime inclusă în N are minim. De exemplu, mulțimea vidă: $\varnothing \subset N$, dar $\varnothing$ nu are minim (nu are sens a calcula sau a spune că mulțimea vidă are minim). De remarcat că orice mulțime $M \neq \varnothing$ și $M \subseteq N$ are minim.

b) Nu orice mulțime inclusă în $Z \setminus N$ are maxim. Analog, $\varnothing \subset Z \setminus N$, dar $\varnothing$ nu are maxim (nu are sens să spunem că $\varnothing$ are maxim sau nu). Analog, orice mulțime $M \neq \varnothing$ și $M \subseteq Z \setminus N$ are maxim. Generalizare: Fie M o mulțime; nu orice mulțime $M_0 \subseteq M$ are minim și nu orice mulțime $M_1 \subseteq M$ are maxim, oricare ar fi M.

c) Dacă $A \supset C$ și $B \supset C$ atunc $A \setminus B \supset C$ numai dacă $C=\varnothing$. Deci cele trei mulțimi sunt: A,B oarecare, $C=\varnothing$.

"Mugur Alb", Revista Școlii clasele I-VIII,Nr.19, Bacău, Anul VI, Nr.3-4-5, 1985-87, h.61

1.PROBLEMĂ PROPUSĂ (clasa a VII-a)

Să se arate că ultima cifră a numărului $A=1981^n+1982^2+\ldots+1990^n$ este aceeași cu a numărului $B=1191^n+1992^n+\ldots+2000^n$.

["Gamma"Brașov,Anul8 Nr.2,Februarie 1986]

2.PROBLEMĂ PROPUSĂ (clasa a VIII-a)

Cîte numere întregi de trei cifre împărțite simultan la 20, 50 și 70 dau același rest?

Soluție:

C.m.m.m.c. al numerilor 20,50,70 este 700. Pentru orice rest $r \in \{0,1,2,\ldots,19\}$ există un singur număr de trei cifre: 700+r, care împărțit la cele trei numere să dea același rest.

Evident, nu putem avea restul > 20. În total avem deci 20 de numere care verifică problema noastră: 700,701,702,...,719.

3.PROBLEMĂ PROPUSĂ (clasa a VIII-a)

Să se arate că dacă $p_1^2-p_1-2p_2=0$, atunci $p_1^{2n+1}+p_2^{n+1}$ se devide cu p_1+p_2; $p_1,p_2 \in N^*$.

Soluție:

$$p_1^{2n+1}+p_2^{n+1}=p_1(p_1^2)^n+p_2p_2^n=p_1(p_1^2)^n-p_1p_2^n-p_1p_2^n+p_2p_2^n=$$
$$=p_1[(p_1^2)^n-p_2^n]+p_2^n(p_1+p_2)=p_1(p_1^2-p_1)[(p_1^2)^{n-1}+(p_1^2)^{n-2}p_2+\ldots$$
$$+p_1^2p_2^{n-2}+p_2^{n-1}]+p_2^n(p_1+p_2)=p_1(p_1+p_2)[(p_1^2)^{n-1}+(p_1^2)^{n-2}p_2+\ldots$$
$$+p_1^2p_2^{n-2}+p_2^{n-1}]+p_2^n(p_1+p_2)$$

Se observă că se poate da factor comun p_1+p_2 și deci problema este rezolvată.

Particularizare

- Să se demonstreze că $(4)^{2n+1} + 6^{n+1}$ se devide cu 10.

Demonstrație. Notăm $p_1=4$, $p_2=6$ și se observă că e verificată relația din enunț $p_1^2-p_1-2p_2=16-4-12=0$

- Să se demonstreze că $2^{2n+1}+1$ se devide cu 3.

Demonstrație. Avem $p_1=2, p_2=1$ și atunci $p_1^2-p_1-2p_2=4-2-2=0$

4.PROBLEMĂ PROPUSĂ (VIII)

Să se afle restul împărțirii numărului $A=\overline{xxx}_y+\overline{yyo}_z+\overline{zzz}_v$ prin z, știind că $x+1=y$, $y+1=z$.

Soluție:

$\overline{yyo}_z : z$.

$xxy_y+zzz_v=xy^2+xy+x+z\text{-}v^2+z\text{-}v+z$

Deci $A\equiv x(y^2+y+1)\equiv(z-2)(z^2-2z+1+z-1+1)\equiv-2(\text{mod}z)$.

5.7 ROBLEMĂ PROPUSĂ(clasa a VIII-a)

Să se determine cîte numere diferite de zero, cu un număr impar de cifre, care adunate cu imaginea lor din oglindă dau un număr ale cărui cifre sunt identice, să se arate că aceste cifre nu pot fi decît 2,4,6,8.

Soluţie: Fie:

$A=k_1 10^{n-1}+k_2 10^{n-2}+\ldots+k_{n-1}10+k_n$, n-impar, $k\in N$

Notăm iA imaginea în oglindă a lui A. Atunci

$iA=k_n\cdot 10^{n-1}+k_{n-1}10^{n-2}+\ldots+k_2 10+k_1$

$A+iA=(k_1+k_n)10^{n-1}+(k_2+k_{n-1})\cdot 10^{n-2}+\ldots+(k_{n-1}+k_2)\cdot 10+(k_1+k_n)=$

$=k\cdot 10^{n-1}+k\cdot 10^{n-2}+\ldots+k\cdot 10+k,\quad k=\overline{0.9}$

$$\Longrightarrow (*)\begin{cases} k_1+k_n=k\\ k_2+k_{n-1}=k\\ \vdots\\ k_{[\frac{n}{2}]+1}+k_{[\frac{n}{2}]+1}=k \Longrightarrow k_{[\frac{n}{2}]+1}=\frac{k}{2};\ k_{[\frac{n}{2}]+1}\in N,\ k=\overline{0,9}\end{cases}$$

Deci k nu poate fi decît 2,4,6,8 şi atunci $k_{[\frac{n}{2}]+1}$ nu poate fi decît 1,2,3,4.

Din sistemul (*) se observă că pentru k fixat, determinarea oricărei cifre dintre $k_1,\ldots,k_{[\frac{n}{2}]}$ implică şi determinarea imaginei ei din oglindă. Odată stabilit $k_{[\frac{n}{2}]+1}$, există k+1posibilităţi de a stabili pe $k_{[\frac{n}{2}]+1}$ şi pentru fiecare $k_{[\frac{n}{2}]}$ stabilit există, k+1 posibilităţi de a stabili pe $k_{[\frac{n}{2}]-1}$ ş.a.m.d.

Deci pentru ca numărul astfel obţinut să rămînă cu un număr impar de cifre, pentru un k fixat trebuie să îndepărtăm din cele $(k+1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ numere, pe cele ce încep ce zero și care vor fi în număr de $(k+1)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}$

Deci numărul cerut este:

$$\sum_{k=2,4,6,8}\left[(k+1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} - (k+1)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\right],\ n \text{ - impar}$$

Observare. Cu [x] am notat partea întreagă a numărului x.

6.PROBLEME PROPUSE (VIII)

a) Ce număr mai mic decît 100 împărțit la 4 dă restul $r_1=1$ și împărțit la 13 dă restul $r_2=1$?

b) Să se afle numerele care împărțite la 52 dau cîtul 3 și restul $r_1>1$ si împărțîte la 43 dau restul r_2.

("Gazeta Matematică" Anul XCIII,Nr.5-611988,p.241)

7.PROBLEMĂ PROPUSĂ (VIII)

Să se arăte că $F=11^1+22^2+33^3+44^4+55^5$ nu poate fi pătrat perfect.

Soluție:

$F\equiv 1+4+7+6+5 \equiv 3 \pmod{10}$,

adică ultima sa cifră este 3 iar nici un pătrat perfect nu se termină în această cifră.

8.PROBLEMĂ PROPUSĂ (VIII)

Ce număr mai mic decît 100 prin împărțirea la 4 și la 26 dă restul 1?.

Soluție:

C.m.m.m.c. al numerelor 4 și 26 este 52. $52+1=53$, care este numărul căutat.

9.PROBLEMĂ PROPUSĂ (VIII)

Un elev a depus la CEC suma de 800 lei. Peste cîți ani el a făcut o sumă de 926.10 lei, știind că dobînda este 5%?.

Soluție:

În primul an va avea $\left(\frac{105}{100}\right)800$ lei,

În anul al doilea $\frac{105}{100}\left(\frac{105}{100}\cdot 800\right)=\left(\frac{105}{100}\right)^2\cdot 800$

În general, după n ani, va avea $\left(\frac{105}{100}\right)^n\cdot 800$ lei (rezultă prin inducție).

Deci $\left(\frac{105}{100}\right)^n 800$ lei $= 926.10$; de unde cu ajutorul logaritmului, obținem $n=3$(ani).

10.PROBLEMĂ PROPUSĂ (VIII)

Să se demonstreze că dacă produsul a n numere pozitive este egal cu 1, și dacă suma acestor numere este strict mai mare decît suma inverselor lor, atunci cel puțin unul dintre aceste numere este strict mai mare ca 1 și cel puțin unul strict mai mic decît 1.

(O generalizare a problemei 0:45, GMB 6/1979, h.253)

11.PROBLEMĂ PROPUSĂ (VIII)

Să se arate că orice număr natural mai mare ca 1 se poate scrie ca un produs de numere prime.

Soluție:

Desigur, conform descompunerii canonice, orice număr natural este egal cu un produs de numere prime.

Dacă numărul natural descompus este prim, produsul are numai un factor.

12.PROBLEMĂ PROPUSĂ (VIII)

La o întrecere sportivă de lupte libere orice luptător concurează cu toți ceilalți. La sfîrșitul întrecerii s-a constatat că fiecare a învins trei adversari. Cîți participanți au fost la această întrecere? Generalizare.

13.PROBLEMĂ PROPUSĂ (VIII)

Pe trei muchii concurente ale unui cub se iau respectiv punctele M,N,P diferite de vîrfuri.

a) să se arate că triunghul MNP nu poate fi dreptunghic.

b) in ce caz este isoscel?

c) dar echilateral?

14.PROBLEMĂ PROPUSĂ (VIII)

Se dau dreptele paralele (e) și (f), intersectate de alte drepte (d_i), $i=\overline{1,n}$, în punctele A_i, respectiv B_i. În fiecare A_i se duc cele două bisectoare ale unghiurilor interioare care se intersectează respectiv în C_{i1} și C_{i2} cu celelalte două bisectoare al unghiurilor interioare duse în punctul corespunzător B_i. Atunci, toate punctele C_{i1} și C_{i2}, $i=\overline{1,n}$, sunt coliniare.

15.PROBLEMĂ PROPUSĂ (VIII)

Fie b c.m.m.m.c. al numerilor $a_1,a_2,\ldots a_n$. Să se arate că există numerele întregi $K_1,K_2,\ldots,K_n$ astfel încît $a_1K_1+a_2K_2+\ldots+a_nK_n=b$.

16.PROBLEMĂ PROPUSĂ (IX)

Să se arate că o propoziție logică este echivalentă cu duala sa dacă și numai dacă această propoziție este fie tautologie, fie conține operatori logici (cel mult negația).

17.PROBLEMĂ PROPUSĂ (IX)

Fie propoziția logică $A(\neg,\wedge,\vee,\Longrightarrow,\Longleftrightarrow)$:

$(p\Longrightarrow Q)\ \vee R_1\wedge \ldots \wedge R_n \Longleftrightarrow \neg(R_1\wedge \ldots \wedge R_n)\Longrightarrow Q \wedge P$

Să se transforme A într-o propoziție logic echivalentă B $(\neg,\wedge,\vee)$. Să se studieze A și duala sa D.

18.PROBLEMĂ PROPUSĂ

Să se afle mulțimile A,B,T care satisfac simultan relațiile:

$C_T(A\cup B)=\{7,8,9\}$

$C_B A=\{4,5,6\}$

$T \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

("Gazeta Matematică" Anul XCIII,Nr.5-6.1988.)

19.PROBLEMĂ PROPUSĂ

Se consideră numărul $n=\overline{\underbrace{xx\ldots x}_{m\text{-ori}}}$, unde $x,m \in N$ și $m>1$. Să se demonstreze că dacă numărul n este prim, atunci x=1 iar m este deasemenea prim.

Soluție:

Dacă $x \neq 1$, atunci n se devide la x, deci n nu mai este prim.

Dacă m nu e prim, fie $p \cdot q = m$, unde $p, q \notin \{1, n\}$. Atunci n se divide cu $\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{p \text{ ori}}$, deci iar nu este prim.

20.PROBLEMĂ PROPUSĂ

Să se arate că dacă $x^2 - x - 2y = 0$ atunci $x^{2n+1} + y^{n+1}$ se divide cu $x+y$, unde $x, y \in N^*$.

21.PROBLEMĂ PROPUSĂ

Dacă mulțimea soluțiilor unei ecuații este simetrică în raport cu două variabile date, atunci și ecuația respectivă este simetrică în raport cu aceste variabile.

22.PROBLEMĂ PROPUSĂ

Să se determine x și y din relația: $1433_{(5)} + 17_{(8)} \overline{3xy5}_{(12)} = \sqrt{15F90_{(16)}} + 2_{(17)}(126D7_{(14)} + A_{(14)})$.

23.PROBLEMĂ PROPUSĂ (IX)

Să se afle mulțimile A și B știind că ele sunt nevide iar

a) $A \Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=\{1,2,3\}$

b) $\{1,2\} \subseteq A$

Soluție:

Cum $\{1,2\} \subseteq A$ rezultă $\{1,2\}\cap B=\emptyset$

I.Fie $3 \in B \Rightarrow 3 \notin A$. Atunci $A=\{1,2\}\cup C$ și $B=\{3\}\cup C$, unde C este o mulțime cu proprietatea că $\{1,2\}\cap C=\emptyset$.

II. Fie $3 \in A \Rightarrow 3 \notin B$. Atunci $A=\{1,2,3\}\cup C$ și $B=C$, unde C este o mulțime nevidă cu proprietatea că $\{1,2,3\}\cap C=\emptyset$.

24.PROBLEMĂ PROPUSĂ (IX)

Să se rezolve inecuația:

$$4x^2 - 12x + 13 \geq \frac{7}{x^2-3x+4}$$

Soluție:

Notăm $x^2-3x+4=t>0$, deoarece $\Delta_x < 0$.

Avem $4t-3\geq 7/t$ sau $4t^2-3t-7\geq 0$

$$t_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{121}}{8} = \begin{cases} 7/4 \\ -1 \end{cases}$$, și cum $t>0$

rezultă $t\geq 7/4$, adică $4x^2-12x+9\geq 0$ ceea ce este evident. Astfel $x \in R$.

25.PROBLEMĂ PROPUSĂ (IX)

Să se determine o condiție necesară și suficientă ca expresia:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x-x_i)^2+b,\ a_i,x_i,b \in R,$$

pentru $1 \leq i \leq n$, să admită extreme (soluție fără derivate).

26.PROBLEMĂ PROPUSĂ (IX)

Să se rezolve în mulțimea numerilor naturale ecuațiile:

a) $2x-3y=6$

b) $5x+3y+7z=25$

Soluție:

a) $\begin{cases} x=3t+3 \\ y=2t,\ t \in N, \end{cases}$

s-a obținut din soluția generală în Z pentru ecuația omogenă asociată: $2x-3y=0$, la care s-a adăugat cea mai mică soluție particulară naturală.

b) Rezolvată în Z dă soluția generală:

$$\begin{cases} x=k_1 \\ y=3k_1+7k_2+6 \\ z=-2k_1-3k_2+1;\ k_1,\ k_2 \in Z. \end{cases}$$

Deoarece $0 \leqslant x \leqslant 5$, k_1 parcurge mulțimea $\{0,2,3,4,5\}$, de unde soluțiile:

$$\begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{în } N^3.$$

27.PROBLEMĂ PROPUSĂ

Să se rezolve sistemul:

$y^2-x^2-2x=1$

$x^2+y^2+2x+2y+2xy+1=64$

Soluție:

$y^2-(x+1)^2=0$ sau $(y-x-1)(y+x+1)=0$

Deci $y=\pm(x+1)$ îl înlocuim în ecuația a doua notînd $\varepsilon=\pm 1$. Efectuînd calculele, simplificînd, găsim:

$$\begin{cases} y=\varepsilon(x+1) \\ (1+\varepsilon)x^2+2(1+\varepsilon)x+(-31+\varepsilon)=0. \end{cases}$$

Dacă $\varepsilon=-1$ sistemul este imposibil.

Dacă $\varepsilon=-1$ rezultă din ecuația de gradul 2 în x că $x_{1,2}=\left\langle\begin{matrix}3\\-5\end{matrix}\right.$, de unde $y_{1,2}=\left\langle\begin{matrix}4\\-4\end{matrix}\right.$, care constituie soluțiile sistemului din enunț.

28.PROBLEMĂ PROPUSĂ (IX)

Fie b_1 și b_2 două baze de numerație. Să se determine toate valorile x pentru care $x_{(b_1)}=x_{(b_2)}$.

29.PROBLEMĂ PROPUSĂ (IX)

Găsiți un algoritm care să determine conversia directă a unui număr din baza b_1 în baza b_2 (fără a mai trece prin baza 10).

30.PROBLEMĂ PROPUSĂ (IX)

Să se arate că un patrulater oarecare poate fi transformat într-un patrulater înscriptibil prin schimbarea eventuală a laturilor între ele.

31.PROBLEMĂ PROPUSĂ

Să se afle care dintre poligoanele regulate avînd perimetrul p și cercul de lungimea p au aria mai mare?

32.PROBLEMĂ PROPUSĂ (IX)

Să se construiască numai cu rigla și compasul numărul $\sqrt{n}$, unde $n \in N$.

33.PROBLEMĂ PROPUSĂ (IX)

Dacă F este intersecția diagonalelor unui patrulater inscriptibil, ABCD atunci:

1) $\dfrac{AF}{CF} = \dfrac{BA \cdot AD}{BC \cdot CD}$ și $\dfrac{BF}{DF} = \dfrac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC}$

2) $\sin\hat{A}\sin\hat{B} = \sin\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}\sin\frac{\overset{\frown}{CD}}{2} + \sin\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}\sin\frac{\overset{\frown}{DA}}{2}$

34.PROBLEMĂ PROPUSĂ (X)

Să se rezolve în numere întregi:

$24x+13y+7z-6u=14$

Soluție:

Scoatem pe u, adică $u = \frac{24x+13y+7z-24}{6} = 4x+2y+z-2+\frac{y+z-2}{6} \in Z$.

Fie $Z \ni p = \frac{y+z-2}{6}$, atunci $y=6p-z+2$

iar $u=4x+13p-z+2$, cu $p,x,z \in Z$.

35.PROBLEMĂ PROPUSĂ (X)

Ecuația $x^n+y^n=x+y$, $n \in N$, $n\geqslant 2$, nu are soluții întregi netriviale (diferite de $x,y \in \{0,1\}$, sau $x=-y$ și n impar).

Rezolvare:

Dacă n este par atunci $x^n\geqslant x$, $y^n\geqslant y$ de unde $x^n+y^n\geqslant x+y$, avînd egalități doar pentru $x,y \in \{0,1\}$.

Fie n impar. Excluzînd cazurile triviale $x=-y \in Z$ sau $x,y \in \{0,1\}$ avem că $xy<0$; fie $x>0$ și $t=-y>0$ Deci $x^n-x=t^n-t$, cu $x \neq t$; dacă $x\geqslant t+1$ evident $(t+1)^n-(t+1)> >t^n-t$ și analog cînd $x\leqslant t-1$.

36.PROBLEMĂ PROPUSĂ (X)

Se dă $F(x)=3+4/x$. Să se determine intervalele pentru care F este bijecție. În acest caz să se determine F^{-1}.

Soluție:

Evident $0 \notin D_F=$ domeniul de definiție al lui F. Fie $R \ni y=3+4/x$. Rezultă $x=-4/3-y \in R$, deci $y \neq 3$.

Astfel $F:R^* \to R \setminus \{3\}$ este bijectivă:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$ deoarece $3+\frac{4}{x1}=3+\frac{4}{x2}$ adică F este injectivă; fie $y \in R\setminus\{3\}$, există $x=\frac{-4}{3-y} \in R^*$ astfel încît $F(x)=y$, adică F este surjectivă.

Deci F admite inversă iar $F^{-1}:R\setminus\{3\} \to R^*$, $F^{-1}(x)=\frac{4}{3-x}$

37.PROBLEMĂ PROPUSĂ (X)

Să se arate că a și b sunt prime între ele dacă și numai dacă $a^{\varphi(b)+1}+b^{\varphi(a)+1} \equiv a+b \pmod{ab}$, unde φ este indicatorul lui Euler.

38.PROBLEMĂ PROPUSĂ (X)

Să dă un tetraedru regulat ABCD de latură a,secționat cu un plan α. Să se afle forma secțiunii și aria acesteia cînd α trece prin:

a) mijloacele muchiilor BC, BD, AD.

b) mijloacele muchiilor AB, AC, AD.

c) mijlocul feței BCD și este paralel cu AD.

d) mijloacele fețelor ABC, BCD, CDA.

39.PROBLEMĂ PROPUSĂ (X)

Să dă o piramidă patrulateră regulată VABCD de latură a și înălțime h, secționată cu un plan α. Să se afle forma secțiunii și aria acestuia cînd α trece prin:

a) A, și mijloacele muchiilor VB și VD.

b) prin mijlocul lui VA și este paralel cu BC.

c) prin milocul lui VA și este perpendicular pe BC.

d) prin A și este perpendicular pe VC.

40.PROBLEMĂ PROPUSĂ (X)

Să dă o piramidă hexagonală regulată de latură a și înălțime h, secționată cu un plan α'. Să se afle forma secțuinii și aria acesteia cînd α trece prin:

a) A și mijloacele muchiilor VC și VF.

b) BF și este perpendicular pe VD.

c) BF și este paralel cu VD.

d) punctele M,N,P astfel încît:

$$\frac{VM}{MB} = \frac{1}{2}, \quad \frac{VN}{NC} = \frac{2}{3}, \quad \frac{VP}{PD} = 1.$$

41.PROBLEMĂ PROPUSĂ (X)

Să dă o prismă triunghiulară regulată de latura a și înălțimea h, secționată cu un plan α. Să se determine forma și aria secțiunii cînd α trece prin:

a) mijloacele muchiilor AA', BC, CC'.

b) mijloacele fețelor ABC, BBC'B', ACC'A'.

c) mijloacele bazei A'B'C' și laturii AB și este paralel cu diagonala A'B.

d) A și este perpendicular pe latura B'C'.

e) M, N, P astfel încît:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}, \frac{BN}{NC} = \frac{2}{3}, \frac{CP}{PC'} = \frac{3}{4}.$$

42.PROBLEMĂ PROPUSĂ (X)

Să dă un cub ABCDA'B'C'D' de latură a, secționat cu un plan α. Să se afle forma secțiunii și aria acesteia cînd a trece prin:

a) mijloacele muchiilor AA', BC, C'D'.

b) mijlocul lui AB și este perpendicular pe diagonala AC'.

c) latura AD și paralel BD'.

d) M, N, P astfel încît:

$$\frac{AM}{MB} = 2, \frac{CN}{NC'} = 3, \frac{D'P}{PA'} = 4.$$

43.PROBLEMĂ PROPUSĂ (X)

Să se demonstreze că punctele de coordonate $(k-n,k,k+n)$, pentru orice k, iar $-k<n<k$, aparțin aceluiași plan care trece prin originea axelor.

44.PROBLEMĂ PROPUSĂ (X)

Fie f o funcție derivabilă pe $[-a,a]$ și cu derivata păstrînd semn constant pe acest interval, unde $a=\sup f(x)$ cînd $x \in D_f$, iar $[-a,a] \subseteq D_f$. Să se arate că șirul definit prin $x_{n+1}=f(x_n)$, cu $x_0 \in D_f$, $n \in N$, este convergent.

45.PROBLEMĂ PROPUSĂ (X)

Să se calculese:

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to 0} \frac{tg(a_1 \text{ x } tg(a_2 \text{ x } tg(a_3 \text{ x } tg(\ldots(a_{n-1} \text{ x } tg(a_n x))\ldots\ldots)_{n\text{-}1\,ori}}{x^n}$$

știind că (a_n) $n \in N^*$ este un șir de numere reale, cu proprietatea că de la un anumit rang toți termenii șirului sunt în intervalul $[-1,+1]$.

(În legătură cu problema 18038, GM12/1979, pag.480)

46.PROBLEMĂ PROPUSĂ

Folosind algoritmul lui Euclid, să se calculeze c.m.m.d.c. a n numere cu ajutorul unui program în FORTRAN.

47.PROBLEMĂ PROPUSĂ. (XII)

Să se determine expresia $E(n)=\sum_{k=1}^{n} \underbrace{6\ldots6}_{k}{}^2$ să fie divizibilă prin 25.

Soluție:

$E(n)\equiv36+56+56+\ldots+56\equiv56n-20 \pmod{100}$,

deoarece $\underbrace{6\ldots6}_{k\ cifre} = (\underbrace{6\ldots6}_{k-2}00+66)^2\equiv66^2\equiv56 \pmod{100}$,
avînd $k\geq3$.

Deci $56n-20\equiv0 \pmod{25}$, adică $6n\equiv20 \pmod{25}$, sau $3n \equiv 10 \pmod{25}$, de unde $n\equiv10 \cdot 3^{-1} \equiv 10 \cdot 17 \equiv20 \pmod{25}$.

$n \in \{25k+20,\ k \in Z\}$.

48.PROBLEMĂ PROPUSĂ (XII)

Să se afle restul împărțirii prin 493 a numărului $B=1971^{1971}+1972^{1972}+1973^{1973}$.

Soluție:

$B\equiv(-1)^{1971}+0^{1972}+1^{1973}\equiv0 \pmod{493}$

49.PROBLEMĂ PROPUSĂ (XII)

Rezolvați: $2x+3y+2z\equiv1 \pmod{4}$.

Soluție:

$(2,3,2,4)=1|1$ =>congruient are soluții și anume:

$1 \cdot 4^{3-1}=16$ soluții ditincte.

Rezolvată în numere întregi ecuația $2x+3y+2z-1=4t$ dă:

$$\begin{cases} x=3k_1-k_2-2k_3-1 & \equiv 3k_1+3k_2+2k_3+3 \pmod 4 \\ y=-2k_1 & \equiv 2k_1 \quad +1 \pmod 4 \\ z=k_2 & \equiv k_2 \pmod 4 \end{cases}$$

pentru orice $k_j \in Z$, k_j - parametri.

$$k_3=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3k_1+3k_2+3 \\ 2k_1 \quad +1 \\ k_2 \end{pmatrix}, k_3=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3k_1+3k_2+1 \\ 2k_1 \quad +1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Firesc că, pentru $k_3=2$ și 3 rezultă analog, și nu se mai calculează.

$$k_1=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3k_2+3 \\ 1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3k_2+1 \\ 1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$k_1=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3k_2+2 \\ 3 \\ k_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3k_2 \\ 3 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$k_2=0,1,2, \text{ și } 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

care reprezintă toate soluțiile distincte ale congruienței.

50.PROBLEMĂ PROPUSĂ (XII)

Fie f:R ->R o funcție continuă, impară. Atunci

$$\int_{-p}^{p} f(x)dx=0,\ (\forall)p \in R.$$

(O generalizare a problemei 14847,GMBP/1975,p.97)

Soluție:

Deoarece f este impară avem că $f(x)=-f(-x)$, $(\forall)x \in [-p,p]$.

$$\int_{-p}^{p} f(x)dx=F(p)-F(-p),$$

unde F este o primitivă a lui f pe intervalul [-p,p].

$$\int_{-p}^{p} -f(-x)dx=\int_{-p}^{p} f(-x)d(-x) = \int_{-p}^{p} f(u)du=F(-p)-F(p)$$

Egalînd cele două integrale obținem $F(p)-F(-p)=0$.

Remarcă. Pentru $f(x) = \dfrac{\sin x}{\ln(2+x^2)}$ se obține 14847.

51.PROBLEMĂ PROPUSĂ

Să se găsească o condiție necesară și suficientă pentru ca $\sum_{i=1}^{n} a_i^x > \sum_{j=1}^{m} b_j^x$, $(\forall)x \in R$.

(O generalizare a problemei 1, pag.46 G.M.A. 1/1981)

52.PROBLÈME PROPOSÉ

Soient les polynômes $P(x)=a_0+\sum_{k=1}^{m} a_{2k-1}x^{2k-1}$ et $Q(x)=\sum_{k=m}^{n} a_{2k}x^{2k}$, aux coefficients positives nonnuls, $1\leq m\leq n$. Montrer que l'équation: $P(x)+Q(x)$ admet exactement deux racines réelles.

Solution. Le polynôme $R(x)=Q(x)-P(x)$ a une seule variation de signe (definition dans le sens de Descartes, c.à.d. il y a deux termes consécutifs a_{i_1} et a_{i_2} du polynôme tels que $a_{i_1}\cdot a_{i_2}<0$, chez nous $a_{2m}(-a_{2m-1})<0$).
Donc $V=1$. Soit p le nombre des racines positives du polynôme $R(x)$. Conformement au théoreme de Descartes (qui affirme que V-p est un nombre pair nonnégatif) il resulte $p=1$.

Soit r le nombre des racines négatives de $R(x)$. Cela signifie que r reprézente le nombre des racines positives du polynôme $R(-x)$, qui a une seule variation de signe, $a_0\cdot(-a_1)<0$. De même $r=1$. Donc l'équation admet une seule racine positive comme une seule racine négative. En tout, deux racines réelles.

Bibliographie:

Alian Bouvier, Micher George, Francois Le Lionnais, "Dictionnaire das Mathématiques" Presses Universitaires de France, Paris,1979.

53. PROBLÈME PROPOSÉ

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ une permutation circulaire. Déterminer toutes les permutations circulaires X telles que:

a) $\sigma X = \sigma^{-1} X$

b) $\sigma X \sigma = X$

c) $X \sigma X = X$.

Solution:

Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $\sigma^2 X = X$, mais $\sigma^2 = \sigma \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \underset{\begin{array}{ccccc} | & | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$$

or $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (la permutation identique). Absurd. Donc, cette equation n'admet pas de solutions.

$$\text{b) } \sigma X \sigma = \sigma \cdot \underset{\begin{array}{ccccc} | & | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ x_4 & x_5 & x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$$

il en résulte que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 & x_5 & x_1 & x_3 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$

1) $x_4=1 \Rightarrow x_1=4, x_3=3, \begin{cases} x_5=2, & x_2=5 \\ x_5=5, & x_2=2 \end{cases}$

2) $x_4=2 \Rightarrow x_1=5, x_3=5$, qui ne convient pas.

3) $x_4=3 \Rightarrow x_1=1, x_3=4, \begin{cases} x_5=2, & x_2=5 \\ x_5=5, & x_2=2 \end{cases}$

4) $x_4=4 \Rightarrow x_1=3, x_3=1, \begin{cases} x_5=2, & x_2=5 \\ x_5=5, & x_2=2 \end{cases}$

5) $x_4=5 \Rightarrow x_1=2, x_3=2$, qui ne convient pas.

Nous avons, en tout, six solutions.

c) $X\sigma X = X$

$\sigma X = X^{-1}X$

$\sigma X = e$

$X = \sigma^{-1}e = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, solution unique.

54.PROBLÈME PROPOSÉ

Soient a et m deux entiers, $m\neq 0$. On construit la suite: $d_0=(a,m), d_{i+1}=(d_i, m/d_0 d_1 \ldots d_i)$. Montrer que, si s este le premier indice pour lequel $d_s=1$, alore $a^{f(m_s)+s}\equiv a^s \pmod{m}$ où $m_s=m/d_0 d_1 \ldots d_s$ et est l'indicateur d'Euler

(Une gènèralizatin d'un thèorème d'Euler).

55.PROBLÈME PROPOSÉ

Soit $g:R\to R$ une fonction dècraissante. Existe-elle une fonction $f: R \to R$, monotone, telle que $f\circ f=g$ sur R?

Solution. Non.

a)Montrons qu'il n'existe pas une fonction f croissante.

Soit $x_1<x_2$, x_1 et x_2 de R. Si f est croissante il en résulte que $f(x_1)\leq f(x_2)$, et puis $f(f(x_1))\leq f(f(x_2))$, c'est-à-dire $g(x_1)\leq g(x_2)$ d'où $x_1\geq x_2$, ce qui contredit l'hypothèse $x_1<x_2$.

b) Montrons qu'il n'existe pas une fonction f décroissante.

Soit $x_1<x_2$, x_1 et x_2 de R. Si f est décroissante il en résulte que $f(x_1)\geq f(x_2)$, et puis $f(f(x_1))\leq f(f(x_2))$, c'est-à-dire $g(x_1)\leq g(x_2)$ et, de même, il en résulte que $x_1\geq x_2$, ce qui contrevient l'hypothèse $x_1<x_2$. La même chose pour les fonctions strictement monotones.

56.PROBLÈME PROPOSÉ

Soit $g:R\to R$ une fonction nonbijective Existe -elle une fonction $F:R\to R$, bijective, telle que

$$f \circ f = g \quad \text{sur } R?$$

Solution. Non.

a) Si g n'est pas ingective, il en résulte qu'ils existent $x_1,x_2 \in R$ tels que $x_1\neq x_2$ avec $g(x_1)=g(x_2)$. D'où $f(f(x_1))=f(f(x_2))$.
Notons $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$.

Nous avons que, ou bien $y_1=y_2$ et alors f n'est pas injective, ou bien $y_1\neq y_2$, mais dans se cas aussi f n'est pas injective puisque $f(y_1)=f(y_2)$.

b) Si g n'est pas surjective, il en résulte qu'il existe $y_0 \in R$ tel gue puelque soit $x \in R$, $g(x)\neq y_0$. On va trouver que f n'est pas surjective, parce que:

- ou bien $f(x)\neq y_0$, $(\forall)x \in R$;

- ou bien $(\exists)x_0 \in R: f(x_0)=y_0$; mais dans ce ras-là il en résulte que $f(x)\neq x_0$ sur R puisque:

s'il existait un $x_1 \in R$ avec $f(x_1)=x_0$ nous avions que $g(x_1)=f(f(x_1))=f(x_0)=y_0$, cela contrevient a là supposition faite sur g. Donc, si g n'est pas injective (surjèctive) il en résulte que f aussi n'est pas injective (surjèctive).

57.PROBLÈME PROPOSÉ

Soit $P(x)=(1+x+x^2+...+x^{k-1})^n$. On note CK^h_n le coefficient de x^h de ce devellopement, que l'on appelle coeffcient k-nomial. (Une généralization des coefficients binomiaux, trinomiaux et du triangle de Pascal) Montrer que

a) $CK^h_n=\sum_{i=0}^{k-1} CK^{h-i}_{n-1}$, où par convention on considère, que $CK^t_r=0$ pour $r(k-1)<t<0$.

b) $CK^h_n=CK^{n-h}_n$

c) $\sum_{h=0}^{h(k-1)} CK^h_n=K^n$

d) $\sum_{h=0}^{h(k-1)}(-1)^h CK^h_n=\begin{cases} 1 \text{ si } k \text{ est impair} \\ 0 \text{ si } k \text{ est pair}\end{cases}$

e) $\sum_{i=0}^{h} CK^i_n \cdot CK^{h-i}_m=CK^h_{n+m}$

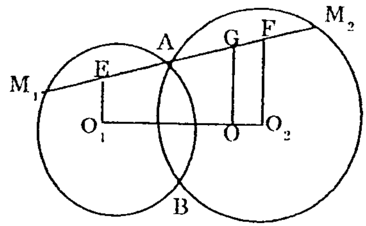
f) $\sum_{h=0}^{n(k-1)}(CK^h_n)^2=CK^n_{2n}$

58.PROBLÈME PROPOSÉ

Par un point d'intersection des deux cercles sécants on trace une droite variable qui coupe pour la deuxième fois les cercles dans les points M_1,respectivement M_2. Determiner le lieu géometrique du point M qui patrage le segment M_1M_2 dans le rapport k.

(Une généralisation du Probleme IV, le concours d'entré dans l'Institut Polytechnique,1987,Roumanie).

Solution.



Soit $O_1E \perp M_1M_2$ et $O_2F \perp M_1M_2$

Soit $O \in O_1O_2$ tel que $O_1O = K \cdot OO_2$ et $M \in M_1M_2$, ou $M_1M = K \times MM_2$. Tragons $OG \perp M_1M_2$.

Notons $M_1E = EA = X$ et $AF = FM_2 = y$. Alors $AG = GM$, parce que $AG = EG - EA = \frac{k}{k+1}(x+y) - x = \frac{-x+ky}{k+1}$, et $GM = M_1M - M_1A - AG = \frac{k}{k+1}(2x+2y) - 2x - \frac{-x+ky}{k+1} =$
$= \frac{-x+ky}{k+1}$

Donc $OM = OA$ aussi.

Le lieu géométrique est un cercle de centre O et rayon OA, sans les points A et B.

Réciproquement. Si $M \in G(O,OA)\setminus\{A,B\}$, la droite AM coupe les deux cercle en M_1, respectivement M_2. Projetons les points O_1, O_2, O sur la droite M_1M_2 dans E,F, respectivement G. Puisque $O_1O = K \cdot OO_2$ il résulte que $EG = k \cdot GF$. Notons $M_1E = EA = x$ et $AF = FM_2 = y$ et on obtient: $M_1M = M_1A + AM = M_1A + 2AG = 2x + 2(EG - EA) = 2x + 2\left[\frac{k}{k+1}(x+y) - x\right] = \frac{k}{k+1}(2x+2y) = \frac{k}{k+1} M_1M$.

Pour k=2 on trouve le probleme cité.

59.PROBLÈME PROPOSÉ

Soient d_A et d_B les diagonales d'un quatrilatere inscriptible qui partent du sommet A, respectivement B. Montrer que $d_A \sin \hat{A} = d_B \sin \hat{B}$.

Premiere solution.

Notons les côtés AB=a, BC=b, CD=c, DA=d du quadrilatère et, puisque.

$$S_{ABC}+S_{ACD}=S_{ABD}+S_{BCD}$$

il en resulte que $ab \sin \hat{B}+cd \sin\hat{D}=ad\sin\hat{A}+bc\sin\hat{C}$.

Le quadrilatère étant inscriptible,on a $\sin \hat{A}=\sin\hat{C}$ et $\sin \hat{B}=\sin \hat{D}$. Donc:

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} = \frac{ab+cd}{ad+bc} = \frac{d_B}{d_A},$$

la dernìere égalité résulte du deuxiéme théorème de Ptolémée, d'où la conclusion.

Deuxiéme solution.

Appliquons le théorème des sinus dans les triangles ABC et ABD, d'où $\widehat{ACB}\equiv\widehat{ADB}$.

Donc:

$$\frac{dA}{\sin \hat{B}} = \frac{a}{\sin \widehat{ACB}} \text{ et } \frac{dB}{\sin \hat{A}} = \frac{a}{\sin \widehat{ADB}},$$

d'où la relation demandée.

60.PROBLÈME PROPOSÉ

Montrer qu'il existe un triangle ayant les côtés, les hauteurs, les rayons des cercles inscrit respectivement circumscrit, comme la surface exprimés en nombres entiers.

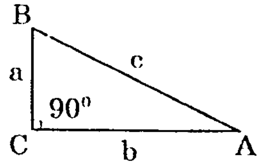
Solution.

Considerons le triangle rectangulaire ABC, de côtés:

$a=30n$,

$b=40n$,

$c=50n$, $n \in N^*$,



qui sont des nombres pithagoréens:

$a^2+b^2=c^2$

$S = \frac{ab}{2} = 600n^2$.

La hauteur h_c du sommet C est égale a 24n, parce que $h_c \cdot 50n/2=600n^2$.

$h_B=30n$, $h_A=40n$

$R = \frac{abc}{4S} =25n$, or $R= \frac{c}{2}$.

$r = \frac{S}{p} = 10n$, ou p=demipérimètre de ABC.

61.PROBLÈME PROPOSÉ

Dans le triangle ABC on trace une cévienne AM qui forme les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ avec les côtés ci-joints AB respectivement AC. Montrer que:

$$\frac{|BA|}{|CA|} = \frac{|BM|}{|CM|} \cdot \frac{|\sin\hat{A}_2|}{|\sin\hat{A}_1|}$$

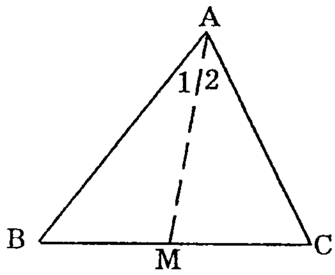
(Une generalisation du théorème de la bisectrice)

Solution.

Écrivons le théorème des sinus dans les traingles ABM et ACM:

$$\frac{|BA|}{\sin\widehat{AMB}} = \frac{|BM|}{\sin\hat{A}_1} \quad (1)$$

et $$\frac{|CA|}{\sin\widehat{AMB}} = \frac{|CM|}{\sin\hat{A}_2} \quad (2)$$



On divise la relation (1) par(2) et on trouve la conclusion.

Si AM est bisectrice, il en résulte que $\hat{A}_1 \equiv \hat{A}_2$, en obtenant le théorème de la bisectrice.

Si ABC est rectangle en Â, alors

$$\frac{|BA|}{|CA|} = \frac{|BM|}{|CM|} \cdot \operatorname{tg} \hat{A}_2.$$

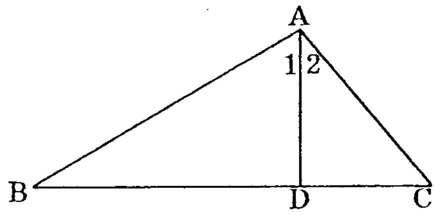
Si AM est mediane, alors $\frac{|BA|}{|CA|} = \frac{\sin\hat{A}_2}{\sin\hat{A}_1}$.

62.PROBLÈME PROPOSÉ

Montrer que dans un triangle le carré de la hauteur est égal au produit des regments déterminés par elle sur le côté opose et les contangentes des angles formés par la hauteur avec les côtés ci-joints.

(Une généralisation du théorème de la hauteur)

<u>Solution.</u>



Soit $AD \perp BC$

Notons $AD=y$,

$BD=x_1$ et $CD=x_2$.

Il faut montrer que

$y^2=x_1 \cdot x_2 \cdot \mathrm{ctg}\hat{A}_1 \cdot \mathrm{ctg}\hat{A}_2$.

Appliquons le théorème des sinus dans les triangles ABD et ADC:

$$\frac{x_1}{\sin\hat{A}_1} = \frac{y}{\cos\hat{A}_1} \quad (1)$$

$$\frac{x_2}{\sin\hat{A}_2} = \frac{y}{\cos\hat{A}_2} \quad (2)$$

Multipliant membre par membre ces deux relations, nous trouvons:

$$y^2=x_1 x_2 \ \frac{\cos\hat{A}_1 \cos\hat{A}_2}{\sin\hat{A}_1 \sin\hat{A}_2}, \text{ q.e.d.}$$

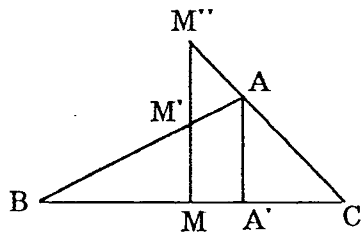
Si le traingle ABC est rectangle en $\hat{A}$, alors: $\mathrm{ctg}\hat{A}_1 \mathrm{ctg}\hat{A}_2=\mathrm{ctg}\hat{A}_1 \cdot \mathrm{ctg}(90^0-\hat{A}_1)=1$, c.a.d. le très connu théorème de la hauteur.

63.PROBLÈME PROPOSÉ

Trouver, en function des côtés d'un triangle, la longueur du segment de la médiartice (d'un côté) compris entre un côté et le prologement de l'autre.

Solution.

Soit AA' la hauter du traingle ABC. Il faut détérminer $|M'M''|$ (voir la Figure).



1) On a A' entre M et C (la même chose quand A' se trouve entre M et B) $|AB|=c$, $|BC|=a$, $|CA|=b$.

as triangles BMM' et BAA' sont semblable, d'où

$\frac{|MM'|}{|AA'|} = \frac{|BM'|}{|BA'|}$,mais $|BA'|=\sqrt{c^2-h^2_A}$ avec $|AA'|=h_A$.

Il en résulte $|MM'| = \frac{a\cdot h_A}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{c^2-h^2_A}}$

D'une manière analogue pour les triangles semiblables CMM'' et CAA' on trouve:

$$|MM''| = \frac{a\cdot h_A}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2-h^2_B}} .$$

(2)Donc $|MM''| = \frac{a\cdot h_A}{2} \left| \frac{1}{\sqrt{b^2-h^2_A}} - \frac{1}{\sqrt{c^2-h^2_A}} \right|$, avec

$h_A= \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ selon la formule de Heron et $p=(a+b+c)/2$ (démipérimètre).

On a pris la valeure absolue dans (2) afin de comprendre les deux cas (voir(1)).

64.PROBLÈME PROPOSÉ

Soit un polygone $A_1A_2 \dots A_n$. Sur une diagonale A_1A_k de celui-ci on prend un point M par lequel on trace une droite d_1 qui coupe les droites A_1A_2, $A_2A_3,\dots,A_{k-1}A_k$ dans les points $P_1,P_2,\dots P_{k-1}$ et une autre droite d_2 qui coupe les autres $A_kA_{k+1},\dots,A_{n-1}A_n,A_nA_1$ dans les points $P_k,\dots,P_{n-1},P_n$. Alors on a $\prod_{i=1}^{n} A_iP_i/A_{f(i)}P_i=1$ où f est la permutation circulaire $\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n-1 & n\\ 2 & 3 & \dots & n & 1\end{pmatrix}$

(Une généralization d'un théorème de Carnot)

65.PROBLÈME PROPOSÉ

Soient le polygone $A_1A_2 \dots A_n$, un point M dans son plan,et une permutation circulaire $f=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n-1 & n\\ 2 & 3 & \dots & n & 1\end{pmatrix}$ One note M_{ij} les intersections de la droite A_iM avec les droites$A_{i+s}A_{i+s+1}$, ... , $A_{i+s+t-1}A_{i+s+t}$ (pour tout i et j, $j \in \{i+s,\dots,i+s+t-1\}$) Si $M_{ij}\neq An$ pour tous les indices respectifs, et și $2s+t=n$, alors on a $\prod_{i,j=1,i+s}^{n,i+s+t-1} \overline{M_{ij}A_j}/\overline{M_{ij}A_{f(j)}}=(-1)^n$ où s et t sont des nombres natural non nuls.

(Généralisation du théorème de Ceva).

66. PROBLÈME PROPOSÉ

Soit un polygone $A_1A_2 \ldots A_n$ inscrit dans un cercle. Soient s et t deux nombres naturels non nuls tels que $2s+t=n$. Par chaque sommet A_i on trace une droite d_i qui coupe les droit $A_{i+s}A_{i+s+1}, \ldots, A_{i+s+t-1}+A_{i+s+t}$ dans les points $M_{i,i+s}, \ldots, M_{i,i+s+t-1}$ et le cercle dans le point M_i'. Alors on a
$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i+s}^{i+s+t-1} \overline{M_{ij}A_j} / \overline{M_{ij}A_{j+1}} = \prod_{i=1}^{n} \overline{M_i'A_{i+s}} / \overline{M_i'A_{i+s+t}}$.

67. PROBLÈME PROPOSÉ

On considère un polyèdre convexe dont les faces ont toutes la même surface. Montrer que la somme desdistances d'un point variable situé à l'intérier aux fuces de ce polyèdre est constant.

Solution.

Notons par V le volume du polièdre et pas S la surface de chacune des n faces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ du corps. Partageons ce polyèdre en n pyramides de sommet M, où M est un point interieur quelconque, et bases $F_1, F_2, \ldots,$ respectivement F_n. Les hauteurs de un pyramides sont justement les distances de M aux faces du polyedèr.

Alors:

$$\frac{S(F_1)\cdot d_1}{3} + \ldots + \frac{S(F_n)\cdot d_n}{3} = V,$$

or $\frac{S}{3}(d_1+\ldots+d_n)=V$, donc $d_1+\ldots+d_n=3V/S=$constant.

68. PROPOSED PROBLEM

Let m be a positive integer.

Prove that any positive integer n, with $n > m$, can be factorized as follows:

$$n = (\ldots((1 \cdot m + x) \cdot m + x)\ldots) \cdot m + x,$$

where x is either a 0 or a 1, or a 2, ..., or a m-1.

69. PROPOSED PROBLEM

Has the equation $x^x + y^y = z^z$ integer solutions?

But the equation $x^y + y^x = 1/xy$?

Solution:

I. No.

Of course x, y, z are non-null.

1) If x, y are positive then z is positive too; we may suppose $0 < x \leqslant y < z$, whence

$$x^x + y^y \leqslant 2y^y < (y+1)^{y+1} \leqslant z^z.$$

2) If x, y are odd (even) negative then z is odd (even) negative too; our equation becomes

$$\frac{1}{a^a} + \frac{1}{b^b} = \frac{1}{c^c}$$, with a, b, c positive;

we may suppose $c < a \leqslant b$, whence

$$\frac{1}{a^a} + \frac{1}{b^b} \leqslant \frac{2}{a^a} < \frac{1}{(a+1)^{a+1}} \leqslant \frac{1}{c^c}.$$

3) If x is odd negative and y even negative we may suppose z odd negative (because it multiplies the equation by -1); changing the notations, our equation becomes as the 2) case.

4) When one of x and y is positive and the other negative, it is easy to handle.

II. YES: (-1, -2), (-2, -4), (-2, -1), (-4, -2) only.

Of course x, y are non-null.

Let's $E(x,y)=xy(x^y+y^x)$.

For x, y positive integers $E(x,y)>1$.

Let's x, y negative.

1) If x, y are odd then $E(x,y)<0<1$

2) If x, y are even we have

$$E(a,b) = \frac{b}{a^{b-1}} + \frac{a}{b^{a-1}},$$

with $a = -x$; $b = -y$:

$a, b \in \{2, 4\}$ because for $a\geq 6$ (or $b\geq 6$) it is easly to prove (by recurrence) that

$$E(a,b)< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Thus for $a=2$ it finds $b=4$ reciprocal.

Wence $(x, y) = (-2, -4), (-4, -2)$.

3) Let's x odd and y even. Anallogicaly

$$E(a,b) = \frac{b}{a^{b-1}} - \frac{a}{b^{a-1}} .$$

For $x=-1$ (or $y=-1$) we have integer solutions: $(-1, -2)$, respectively $(-2, -1)$.

From 2) we have $a<6$, $b<6$. But for

$(a,b) = (3,2), (3,4), (5,2), (5,4)$ $E(a,b) \neq 1$.

70. PROPOSED PROBLEM

Prove that the equation

$$a_1^x + \dots + a_p^x = b_1^x + \dots + b_q^x ,$$

with all $a_i, b_j > 0$, has a finit number of real solutions. Of course, $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ are different one from another.

Solution:

Let $f(x) = a_1^x + \dots + a_p^x - b_1^x - \dots - b_q^x$,

$f : R \to R$, a continuous and derivable function.

1) Let $\max\limits_{i,j} \{a_i, b_j\} = a_1$ and $\min\limits_{i,j} \{a_i, b_j\} = a_p$.

If $a_1 > 1$ then $L = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a_1^x \cdot \Big[1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x + \dots +$

$+ \left(\frac{a_p}{a_1}\right)^x - \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^x - \dots - \left(\frac{b_q}{a_1}\right)^x \Big] = +\infty$, and

$l = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a_p^x \cdot \Big[\left(\frac{a_1}{a_p}\right)^x + \dots + \left(\frac{a_{p-1}}{a_p}\right)^x + 1 - \left(\frac{b_1}{a_p}\right)^x - \dots -$

$$\left(\frac{b_1}{a_p}\right)^x \Bigg] = \begin{cases} 0, & \text{if } a_p > 1 \\ +\infty, & \text{if } a_p < 1 \\ 1, & \text{if } a_p = 1. \end{cases}$$

Hence f can't have an infinity of zeros.

If $a_1 < 1$ it finds $a_p < 1$ too, hence $L=0$ and $l=+\infty$, the function can't have an infinity of zeros.

We may eliminate the case $a_1 = 1$ because a_1^x = constant.

2-3-4) These cases are analogously studied, namely when the maximum and the minimum are respectively: (a_1, b_q) or (b_1, a_p) or (b_1, b_q).

71. PROPOSED PROBLEM

Solve in integer numbers the equation:

$$x^y - 7z + 3w = 8$$

Solution:

$$w = \frac{-x^y + 7z + 8}{3} = 2z + 2 + \frac{-x^y + z + 2}{3}$$

But $$\frac{-x^y + z + 2}{3} = t \in Z.$$

Then $z = x^y + 3t - 2$, hence

$$w = 2x^y + 7t - 2.$$

The general integer solution is:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^v + 3t - 2 \\ w = 2u^v + 7t,\ t \in Z, \\ \qquad \text{with } (u, v) \in (Z^* \times N) \cup (\{0\} \times N^*) \cup \\ \qquad \qquad \cup (\{\pm 1\} \times Z). \end{cases}$$

72. PROPOSED PROBLEM

Solve the equation $x^3 - 4y = 23$ in integer numbers.

Solution:

$x^3 - 4y \equiv x^3 \pmod 4$ and $23 \equiv 3 \pmod 4$;

Hence $x^3 \equiv 3 \pmod 4$, or

$x = 4k + 3$, $k \in Z$.

$$y = \frac{(4k + 3)^3 - 23}{4} = 16k^3 + 36k^2 + 27k + 1$$

73. PROPOSED PROBLEM

Prove that the equation $x^3 - 7x_1 \ldots x_n = 3$ hasn't integer solutions.

Solution:

If the equation has solutions then x^3-3 is divided by 7. But, for any $x = 7k + r$, $r \in \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$, $k \in Z$, $x^3 \not\equiv 3 \pmod 7$.

74. PROPOSED PROBLEM

Prove that the equation

$ax^n + by = c$, were $a, b, c \in Z$, $a.b \neq 0$ has integer solutions if and only if there is $r \in \{0, 1, |b| -1\}$ such that $ar^n \equiv c \pmod{b}$.

Solution:

$$y = \frac{ax^n - c}{b} \in Z. \text{ We write } x = b\text{-}k+r,\ k \in Z,$$

and $r \in \{0, 1, |b| -1\}$. Hence:

$$y = \frac{a(bk+r)^n - c}{b} = d + \frac{ar^n - c}{b} \in Z,$$

we have noted by d the integer quetient of the division, $d \in Z$.

Then it must $ar^n - c$ be divided by b.

Example. Solve in integers the following equation:

$3x^5 - 7y = 6$.

We find $\begin{cases} x = 7k + 4 \\ y = \dfrac{3(7k + 4)^5 - 6}{7} \end{cases}$, $k \in Z$.

75. PROPOSED PROBLEM

Find the general positive integer solution of the diophantine equation:

$$9x^2 + 6xy - 13y^2 - 6x - 16y + 20 = 0$$

First solution.

The equation becomes: $2u^2 - 7v^2 + 45 = 0$, (1)

where $u = 3x + y - 1$ and $v = 2y + 1$. (2)

We solve (1) (see [1]). Thus:

$$(3)\quad \begin{cases} u_{n+1} = 15u_n + 28\,v_n \\ v_{n+1} = 8u_n + 15\,v_n, \quad n \in N, \end{cases}$$

with $(u_0, v_0) = (3, 3\,\varepsilon)$, $\varepsilon = \pm 1$.

Clearly, for all $n \in N$, v_n is odd, and u_n as well as v_n are multiple of 3. Hence, there exist x_n, y_n in N, with

$$(4)\quad \begin{cases} x_n = (2u_n - v_n + 3)/6 \\ y_n = (v_n - 1)/2, \quad n \in N, \end{cases}$$

(from (2)). Now, we find a closed expression for (3):

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad n \in N,$$

where $A = \begin{pmatrix} 15 & 28 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$, calculating A^n (see [1]).

Second solution.

We transform (2) as: $u_n = 3x_n + y_n - 1$ and $v_n = 2y_n + 1$, $n \in N$.

Using (3) and doing the calculus, we find:

$$(5)\qquad \begin{cases} x_{n+1} = 11x_n + \dfrac{52}{3} y_n + \dfrac{11}{3} \\ y_{n+1} = 12x_n + 19y_n + 3, \qquad n \in N, \end{cases}$$

with $(x_0, y_0) = (1, 1)$ or $(2, -2)$;

(two infinitude of integer solutions).

$$\text{Let } A = \begin{pmatrix} 11 & 52/3 & 11/3 \\ 12 & 19 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Then } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, n \in N, (6).$$

From (5) we have $y_{n+1} \equiv y_n \equiv \ldots \equiv y_0 \equiv 1 \pmod 3$, hence always $x_n \in Z$.

Of course (4) are equivalent to (6) (see [1]), and they constitute the general solutions.

Reference

[1] F. Smarandache, A Methoud to solve the Diophantine Equation $ax^2 - by^2 + c = 0$.

76. PROPOSED PROBLEM

Let $\varepsilon = 1$ or -1 and

$$N = \varepsilon \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} \cdot 3^{n-2k} \cdot 2^{3k} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2k+1} \cdot 3^{n-2k-1} \cdot 2^{3k+1}$$

Prove that N is a perfect square if and only if $\varepsilon = 1$ and $n = 0$ or $n = 3$.

Solution. Using the diophantine equation $x^2 = 2y^4 - 1$ (which has the only solutions (1, 1) and (239, 13); see [1], [2] or [3]) we note $t = y^2$. The general integer solution for $x^2 - 2t^2 + 1 = 0$ is:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 4t_n \\ t_{n+1} = 2x_n + 3t_n \end{cases},$$

for all $n \in N$, with $(x_0, y_0) = (1, \varepsilon)$ (see [4]); or

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \text{ for all } n \in N,$$

where a matrix at the power zero is equal to the unit matrix.

Hence

$$\begin{pmatrix} x_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\varepsilon\sqrt{2}}{2}(3+2\sqrt{2})^n \;.\; \dfrac{1-\varepsilon\sqrt{2}}{2}(3-2\sqrt{2})^n \\ \dfrac{2r+\sqrt{2}}{4}(3+2\sqrt{2})^n \;.\; \dfrac{2\varepsilon-\sqrt{2}}{4}(3-2\sqrt{2})^n \end{pmatrix}, n \in N,$$

Whence

$$t_n = \frac{2\varepsilon+\sqrt{2}}{4}(3+2\sqrt{2})^n \;.\; \frac{2\varepsilon-\sqrt{2}}{4}(3-2\sqrt{2})^n, \quad n \in N,$$

or $t_n = N$, $n \in N$. We obtain for $\varepsilon = 1$ and $n = 0$ or 3 that $N = 1$ or 169 respectively. Another values for n there are not yet, because we have only two solutions for the equation in integers.

References.

1. R.K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory, Springer-Ucrlog, 1981, Problem D6, 84-85.
2. W. Ljundgren, Zur Theorie der Gleichung $x^2+1=Dy^4$, Avh. Noroske Vid. Akad. Oslo, I, 5(1942)#5, 27 pp; MR 8, 6
3. W. Ljundgren, Some remarks on the diophantine equations $x^2-Dy^4=1$ and $x^4-Dy^2=1$, J. London Math. Soc. 41 (1966), 542-544.
4. F.Gh. Smarandache, A Method to solve the Diophantine Equations with two unknowns of second degree, Gamma, Brașov (to appear).

77. PROPOSED PROBLEM

Prove that the general solution in positive integers for the Diophantine Equation $2x^2 - 3y^2 = 5$ is

$$x_n = \frac{4+\varepsilon\sqrt{6}}{4}(5+2\sqrt{6})^n + \frac{4-\varepsilon\sqrt{6}}{4}(5-2\sqrt{6})^n$$

$$y_n = \frac{3\varepsilon+2\sqrt{6}}{6}(5+2\sqrt{6})^n + \frac{3\varepsilon-2\sqrt{6}}{6}(5-2\sqrt{6})^n ,$$

for all $n \in N$, where $\varepsilon = \pm 1$.

Solution.

The smallest positive integer solutions are (2,1), (4,3).

Let $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases}$, for all $n \in N$,

and $(x_0, y_0) = (2, \pm 1)$. Then

$$\begin{cases} 2ab = 3cd & (1) \\ 2a^2 - 3c^2 = 2 & (2) \\ 2b^2 - 3d^2 = -3 & (3) \end{cases}$$

Whence $a = \pm d$ and $b = \pm \frac{3}{2}c$. Because we look for positive solutions we find $a = d$, $b = \frac{3}{2}c$.

The smallest positive integer solution (with nonzero coordinates) for (2) is (5, 4). Hence a=d=5, c=4, b=6. It results by mathematical induction that:

$$\text{(GS)} \qquad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad n \in N,$$

Let $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\lambda \in R$, and I the unit matrix.

Det $(A - 2 \cdot I) = 0$ involves $\lambda_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$ and the proper vectors $v_{1,2} = (\sqrt{6}, \pm 2)$;

(that is $Av_i = \lambda v_i$, $i = 1, 2$).

We note $P = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Then $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$,

whence

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda_1^n + \lambda_2^n) & \frac{\sqrt{6}}{6}(\lambda_1^n - \lambda_2^n) \\ \frac{\sqrt{6}}{6}(\lambda_1^n - \lambda_2^n) & \frac{1}{2}(\lambda_1^n + \lambda_2^n) \end{pmatrix}$$

Taking $(x_0, y_0) = (2, \varepsilon)$ one finds the general integer solution.

We prove (GS) constitutes the general solution in positive integers:

by reductio ad absurdum let (α, β) be a positive integer solution for our equation. Of course $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ is other solution with $\alpha_1 < \alpha$, $\beta_1 < \beta$, also $\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}$ with $\alpha_2 < \alpha_1$, $\beta_2 < \beta_1$ etc.

Let (α_i, β_i) be the smallest positive solution greater than or equal to $(4,3)$. If $(\alpha_i, \beta_i) = (4,3)$ then $(\alpha_i, \beta_i) \in$ (GS); if no calculate $(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1})^t = A^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix}$.

If $(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}) = (2, \pm 1)$ then it belongs to (GS); if no, it results $2 < \alpha_{i+1} < 4$, but it is absurd.

Remark. This method can be generalized for all Diophantine Equations of Second Degree with two Unknowns.

78. PROPOSED PROBLEM

Find the general solution in integers of the Diophantine Equation: $2x^2 - 3y^2 - 5 = 0$

79. PROPOSED PROBLEM

Let p be an odd number. Prove or disprove that p and p+r are simultaneously prime numbers if and only if

$$(p-1)!\left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p+r}\right) + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+r} \quad \text{is an integer.}$$

[Problem 328, "Colledge Mathematical Journal", Vol.17, №3, 1986, p.249].

88. PROPOSED PROBLEM

Let $p_{i_1+1}, \dots, p_{i_2}, \dots, p_{i_{n+1}}$ be coprime integers two by two, and let $a_1, \dots, a_n$ be integers such that a_j is coprime with $p_{j_1+1}, \dots, p_{j_{1+1}}$ for any j. Consider the conditions (j) $p_{j_j+1}, \dots, p_{j_{j+1}}$ are simultaneously prime if and only if $c_j \equiv 0(\mathrm{mod}\ p_{j_j+1}, \dots, p_{j_{j+1}})$ for any j. Prove that $p_{i_1+1}, \dots, p_{i_2}, \dots, p_{i_{n+1}}$ are simultaneously prime if and only if

$$\sum_{j=1}^{n} a_j c_j/(p_{i_j+1}, \dots, p_{i_{j+1}}) \text{ is an integer.}$$

81. PROPOSED PROBLEM

Let P be a point on median AA' of the triangle ABC. Note B' and C' intersections of BP and CP with CA, respectively AB.

a) Prove that B'C' is parallel to BC.

b) When AA' isn't median, let A" be intersection of B'C' with BC. Prove that A' and A" divide BC in an anharmonicus rapport.

Solution.

a) From Ceva's theorem in ABC we find:

$$(1)\quad \frac{|C'A|}{|C'B|}\cdot\frac{|A'B|}{|A'C|}\cdot\frac{|B'C|}{|B'A|}=1,$$

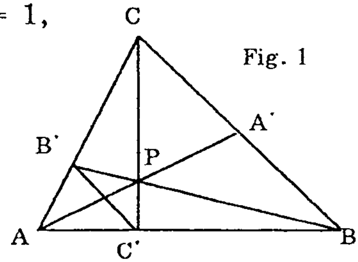


Fig. 1

and, because $\frac{|A'B|}{|A'C|}=1,$

it results:

$$\frac{|C'A|}{|C'B|}=\frac{|B'A|}{|B'C|},$$

i.e. B'C' is parallel to BC.

b) From Menelaus theorem we find:

$$(2)\quad \frac{|C'A|}{|C'B|}\cdot\frac{|A''B|}{|A''C|}\cdot\frac{|B'C|}{|B'A|}=1,$$

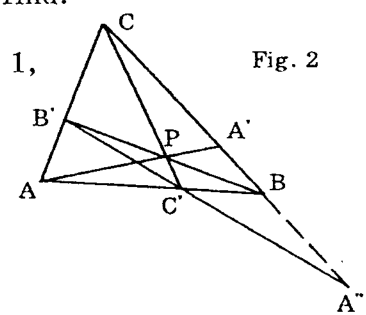


Fig. 2

We divide (1) to (2) and obtain

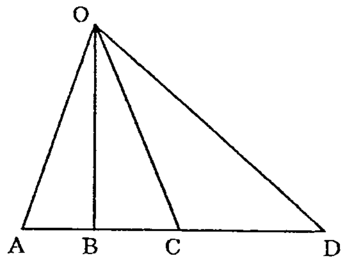
$$\frac{|A'B|}{|A'C|}:\frac{|A''B|}{|A''C|}=1$$

82. PROPOSED PROBLEM

Let A, B, C, D be collinear points and O a point outwardly of their line. Prove that:

$$(OA^2 - OC^2)BD + (OD^2 - OB^2)AC =$$
$$= 2AB \cdot BC \cdot CD + (AB^2 + BC^2 + CD^2)AD -$$
$$- (AB^3 + BC^3 + CD^3).$$

Solution:



Stewart's theorem is used four times for points: (A, B, C), (B, C, D), (A, C, D) respectively (A, B, D) and it obtains the following relations:

$$OA^2 \cdot BC - OB^2 \cdot CA + OC^2 \cdot AB = AB \cdot BC \cdot CA,$$
$$OB^2 \cdot CD - OC^2 \cdot DB + OD^2 \cdot BC = BC \cdot CD \cdot DB,$$
$$OA^2 \cdot CD - OC^2 \cdot DA + OD^2 \cdot AC = AC \cdot CD \cdot DA,$$
$$OA^2 \cdot BD - OB^2 \cdot DA + OD^2 \cdot AB = AB \cdot BD \cdot DA.$$

Suming member with member, all these relations, it finds the asked question.

It uses, too, that:

$$AC = AB + BC,$$
$$BD = BC + CD,$$
$$AD = AB + BC + CD.$$

83. PROPOSED PROBLEM

Let ABCD be a tetrahedron and $A_1 \in CD$, $A_2 \in CB$, $C_1 \in AD$, $C_2 \in AB$ four coplanar points.
Note $E = BC_1 \cap DC_2$ and $F = BA_1 \cap DA_2$. Prove that the lines AE and CF intersect. ("Crux Mathematicorum", Vol.14, №7, September, 1988, p.203, problem 1368).

Solution. Note $BD \cap AE = A'$ and $BD \cap CF = C'$
We shall prove A' and C' are identical.
Firstly, we project A, B, C, D on plane $(A_1A_2C_1C_2)$ in points A', B', C' respectively D'. Because we have four couples of semblable triangles:
$AA'C_2$ with $BB'C_2$, $BB'A_2$ with $CC'A_2$, $CC'A_1$ with $DD'A_1$, and $DD'C_1$, with $AA'C_1$, it involves:

$$\frac{C_2A}{C_2B} = \frac{AA'}{BB'}, \quad \frac{A_2B}{A_2C} = \frac{BB'}{CC'}, \quad \frac{A_1C}{A_1D} = \frac{CC'}{DD'} \quad \text{and}$$

respectively $\dfrac{C_1D}{C_1A} = \dfrac{DD'}{AA'}$. By multiplication of these four equalities, member with member, we find

$$\frac{C_2A}{C_2B} \cdot \frac{A_2B}{A_2C} \cdot \frac{A_1C}{A_1D} \cdot \frac{C_1D}{C_1A} = 1 \qquad (r)$$

We apply Ceva's theorem in triangles ABD and BCD:

$$\frac{C_2A}{C_2B} \cdot \frac{C_1D}{C_1A} = \frac{A'D}{A'B}, \text{ respectively } \frac{A_2B}{A_2C} \cdot \frac{A_1C}{A_1D} = \frac{C'B}{C'D}$$

We replace these two equalities into (r) and we find:

$$\frac{A'D}{A'B} = \frac{C'B}{C'D}, \quad \text{hence} \quad A' \equiv C',$$

because $A'C' \in [BD]$.

84. PROPOSED PROBLEM

Let $A_1, A_2, \ldots, A_n$ be a pyramid and α a plane which cuts the sides A_i, A_{i+1} in P_i. Prove that:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{P_iA_i}{P_iA_{i+1}} = 1$$

Solution.

We project $A_1, A_2, \ldots, A_n$ on α in $A'_1, A'_2, \ldots$ respectively A'_n. Right triangles $P_iA_iA'_i$ and $P_iA_{i+1}A'_{i+1}$ are semblable, hence

$$\frac{P_iA_i}{P_iA_{i+1}} = \frac{A_iA'_i}{A_{i+1}A'_{i+1}}.$$ Our product becomes:

$$\frac{A_1A'_1}{A_2A'_2} \cdot \frac{A_2A'_2}{A_3A'_3} \cdot \ldots \cdot \frac{A_nA'_n}{A_1A'_1} = 1$$

85. PROPOSED PROBLEM

How many non-coplanar points in space can be drawn at integral distances each from other?

Is it possible to find an infinity of such points?

86. PROPOSED PROBLEM

Let n points be in the space such that the maximum distance among two of them is α.

Prove that there exists a sphere of radius $r \leq \alpha\sqrt{6}/4$, which contains in interior or on its surface all these points.
(A generalization in space of Yung's theorem).

87. PROPOSED PROBLEM

Let $f : A \to B$ be a function. Find all functions $h \neq 1_A$ such that $f \circ h = f$.

Solution:

If f is injective let $x \in A$ and $f(h(x))=f(x)$, whence $h(x)=x$ or $h=1_A$.
Then f may not be injective (necessary condition). It is sufficient:
$(\exists)$ $x_1 \neq x_2$ such that $f(x_1)=f(x_2)$.
We construct $h:A \to A$, $h(x_1) = x_2$
and $h(x)=x$ for $x \neq x_1$. Hence $h \neq 1_A$.
Let $C = \left\{x \in A \mid (\exists) y \in A,\ y \neq x,\ f(x)=f(y)\right\}$.
All functions h from the problem have the form:
$h : A \to A$, $h(x) = x$ for $x \in A \setminus C'$,
where T $\varnothing \neq C' \subset C$, and
if $x_1 \in C'$ then $h(x_1) = x_2$ for which $f(x_1)=f(x_2)$.

88. PROPOSED PROBLEM

For any k, m, n ∈ N prove that:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} A_m^i A_n^{k-i}\, 2^{n-k+i} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} A_{m+j}^k$$

Solution.

$$(1+x)^n\cdot x^m = \binom{n}{0}\cdot x^m + \binom{n}{1}\cdot x^{m+1} + \binom{n}{2}x^{m+2}+\ldots+\binom{n}{n}\cdot x^{m+n}$$

Now, we derive this equality for k times. Because $\left[(1+x)^n\right]^{(k)} = A_n^k(1+x)^{n-k}$ and $(x^m)^{(k)} = A_m^k x^{m-k}$

for any k, m, n ∈ N, k⩽m, and by Leibniz formula in the left member we find:

$$\binom{k}{0}A_n^k(1+x)^{n-k}\cdot x^m + \binom{k}{1}A_n^{k-1}(1+x)^{n-k+1}\cdot A_{0m}^{1}x^{m-1} + \ldots +$$

$$+\binom{k}{k-1}A_n^1(1+x)^{n-1}\cdot A_m^{k-1}x^{m-k+1} + \binom{k}{k}(1+x)^n A_m^k x^{m-k} =$$

$$=\binom{n}{0}A_m^k x^{m-k} + \binom{n}{1}A_{m+1}^k x^{m+1-k} +\ldots+\binom{n}{n}A_{m+n}^k x^{m+n-k} =$$

We replace x=1 and obtain:

$$\binom{k}{0}A_n^k 2^{n-k}+\binom{k}{1}A_n^{k-1}2^{n-k+1}\cdot A_m^1 x^{m-1} + \binom{k}{k-1}A_n^1 2^{n-1}\cdot A_m^{k-1}+$$

$$+\binom{k}{k}2^n A_m^k = \binom{n}{0}A_m^k+\binom{n}{1}A_{m+1}^k + \ldots + \binom{n}{n}A_{m+n}^k$$

When a<b we have $\binom{a}{b} = A_a^b = 0$

Reference:

C. Năstăsescu, M.Brandiburu, C.Niţă, D.Joiţa, "Exerciţii şi probleme de algebră", EDP, Bucureşti,1981.

89. PROPOSED PROBLEM

Let f and g be two functions, g has an inverse, and a, b are real numbers. Prove that if the equation:

$$\left[\frac{f(x)}{a}\right] = \frac{g(x)}{b}$$

admits solutions,, where [x] is the greatest integer smaller or equal to x, then there exists an integer z such that

$$0 \leqslant (f(g^{-1}(bz)) - az)/a < 1$$

Solution.

Let x_0 be a solution of the equation. We take

$$z = \frac{g(x_0)}{b} \in \mathbb{Z}, \text{ it involves } x_0 = g^{-1}(bz).$$

Hence

$$\left[\frac{f(g^{-1}(bz)}{a}\right] = z$$

and in accordance with $[x] \leqslant x < [x] + 1$ we find

$$z \leqslant \left[\frac{f(g^{-1}(bz)}{a}\right] < z + 1$$

whence it involves our double inequality.

90. PROPOSED PROBLEM

Prove that if A and B are two convex sets, then AxB is a convex set too.

Solution.

$AxB = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ and } b \in B \}$.

Let $x_1 = (a_1, b_1)$ and $x_2 = (a_2, b_2) \in AxB$.

We should prove that $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in AxB$,

for $\alpha \in [0, 1]$.

$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = (\alpha a_1 + (1-\alpha)a_2, \alpha b_1 + (1-\alpha)b_2 \in AxB$

because $\alpha a_1 + (1-\alpha)a_2 \in A$ and $\alpha b_1 + (1-\alpha)b_2 \in B$.

91. PROPOSED PROBLEM

Let $a_1, a_2, \dots, a_t$ be a system of integers with the property that $(\forall)a_i$ $(\exists)$ a_j such that:

(C) $\quad a_i \equiv -a_j \pmod m$,

where m is not null integer, and

Card $\{i/(c)\}$ = Card $\{j/(c)\}$.

One makes up the sum $S_k = \sum a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_k}$ where summation is done after all sequences $i_1, i_2, \dots, i_k$ such that $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant \dots < i_k \leqslant t$.

Prove that: if t is even number and k odd number, then S_k is multiple of m. (Two partial generalizations of the Problem E3128, 1/1986, American Math. Monthly).

The proof is simple. If $t=2r$, $r \in N^*$ in the development of the congruence:

(1) $(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_t) \equiv 0 \pmod{m}$

the sums S_k represent the coefficients of x^{t-k}, $k \in \{1, 3, 5, \dots t-1\}$, that is all the odd powers (values) of x.

But (1) becames through a rearrangement, according to the hypothesis:

(2) $(x-a_{i_1})(x-a_{i_2}) \dots (x-a_{i_r})(x+a_{i_r}) \dots (x+a_{i_2})(x+a_{i_1}) \equiv 0$ (mod m), or:

$(x^2-a_{i_1}^2)(x^2-a_{i_2}^2) \dots (x^2-a_{i_r}^2) \equiv 0 \pmod{m}$.

In the left part of (2) we have a polynomial which, developed, contains no odd power of x, which means that in (1) all the coefficients of the odd powers of x are multiplies of m.

Here are the applications that we obtain:

Corrolary 1. We find a nice result when $a_1, a_2, \dots, a_t$ costitute a reduced system of rests $C_1, C_2, \dots, C_{\phi(m)}$ modulo $m \neq \pm 1, \pm 2$. Then $t=\phi(m)$ is an even number, being the function of Euler, and k is takeh as an odd number. S_k will be a multiple of m.

This corollary is a partial generalization of the mentioned problem.

Corrolary 2. Analogously, if we take $a_1, a_2, \dots, a_t$ as being a complete system of remainders (for example $1, 2, \dots, |m|-1$) modulo m where m and k are odd numbers, S_k will be multiple of m. There appears another partial generalization of the mentioned problem.

92. A generalization of the problem E3037 "American Mathematical Montly", 2/1984, p.140

Let m be an integer. Find all positive integers n such that $m\phi(n)$ divides n.

Solution.

$n=0$ verifies; the case $n=1$ is trivial.

Let $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$, where all p_i are distinct primes and all $\alpha_i \in N^*$, which verifies our assumption. Then

$$(1) \quad \frac{n}{m\phi(n)} = \frac{p_1}{p_1-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_s}{p_s-1} \cdot \frac{1}{m} \in Z$$

Clearly $2|n$ because all p_i-1 are multiple of 2 (without the case when a $p_i=2$). Hence, from (1) it results $1 \leqslant s \leqslant 2$, because $(p_2-1)\dots(p_s-1)$ is a multiple of 2^{s-1}.

a) If $s=1$ we have

$$\frac{n}{m\phi(n)} = \frac{2}{m}$$

For m a divisor of 2 there exists $n=2^{\alpha}$, $\alpha \in N^*$.

b) If $s=2$ we have

$$\frac{n}{m\phi(n)} = 2\,\frac{p_2}{p_2-1}\cdot\frac{1}{m}$$

and we may take $p_2=3$ only. Hence, if m divides 3 there exists $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta$, with $\alpha, \beta \in N^*$.

Remarks.

1). This division is possible if and only if

$m \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$

2). For $m=1$ we find the problem E3037, AMM 2/84, p.140.

93. PROPOSED PROBLEM

How many solutions has the inequality $\phi(x) < a$? Find their general form.

Solution.

(This inequality remembers the Carmichaël's equation $\phi(x) = a$).

We can consider $a \in N$ because $\phi(x) \in N$.

The cases $a=0$, $a=1$ and $a=2$ are trivial.

Let a be positive integer ≥ 3. Let $p_1 < p_2 < \dots < p_s \leq a$ be prime numbers less or equal to a. If x verifies our inequality then $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$, with $\alpha_i \in N$ for all i, because from "p_i divides x and $p_k > a$ and p_k is prime number" we find $\phi(x) \geq \phi(p_k) = p_k^{-1} \geq a$", which is absurd.

Hence

$$\phi(x) = x\left(\frac{p_1-1}{p_1}\right)^{\varepsilon_1} \cdots \left(\frac{p_s-1}{p_s}\right)^{\varepsilon_s} < a,$$

where $\varepsilon_i = \begin{cases} 0, & \text{if } \alpha_i = 0; \\ 1, & \text{if } \alpha_i \neq 0; \end{cases}$ for all i,

or $(x) < \left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\varepsilon_1} \cdots \left(\frac{p_s}{p_s-1}\right)^{\varepsilon_s} \cdot a$. It results that the number of solutions of our inequality is finite.

With the previous notations we obtain the general form of the solutions:

$$S = \bigcup_{\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_s=0}^{s} \Big\{ x \,|\, x = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s},\ \alpha_i \in N \text{ for all } i,$$

$$(x) < \left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\varepsilon_1} \cdots \left(\frac{p_s}{p_s-1}\right)^{\varepsilon_s} \cdot a,\quad \varepsilon_i = 0 \text{ when}$$

$$\alpha_i = 0 \text{ and } \varepsilon_i = 1 \text{ when } \alpha_i \neq 0 \text{ for all i} \Big\} \cup \{0\}.$$

The number of the solutions is equal to:

card S = card B, where

$$B = \Big\{ b \,|\, b = \left[\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\varepsilon_1} \cdots \left(\frac{p_s}{p_s-1}\right)^{\varepsilon_s} \cdot a/(p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s})\right],$$

$$0 \leq \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_s \leq s, \text{ all } \alpha_i \in N,\quad \varepsilon_i = 0 \text{ when}$$

$$\alpha_i = 0 \text{ and } \varepsilon_i = 1 \text{ when } \alpha_i \neq 0 \text{ for all i} \Big\}.$$

Remark. From this proposal we find that the equation $\phi(x) = a$ admits a finite number of solutions, because the inequality $\phi(x) < a-1$ has a finite number of solutions (on the Carmichaël's conjecture).

Example. $\phi(x) < 10$ has in all 19 solutions:

general form $2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}\cdot 7^{\alpha_4}$		2^{α_1}	3^{α_2}	5^{α_3}	7^{α_4}	$2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}$	$2^{\alpha_1}\cdot 5^{\alpha_3}$
solutions	0 1	2, 4, 8, 16	3, 9	5	7	6, 12, 18, 24	10, 20

$2^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_4}$	$3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}$	$3^{\alpha_2}\cdot 7^{\alpha_4}$ or $5^{\alpha_3}\cdot 7^{\alpha_4}$	$2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}$
14	15	-	30

94. PROPOSED PROBLEM

Let f be a function, $f : Z \to Z$.

a) On what terms is there a function $g : R \to Z$ such that $g \circ f = 1_E$, but $f \circ g \neq 1_E$ where 1_E is the identical function ($1_E: E \to E$ by $1_E(x)=x$, $(\forall)x \in E$)?

b) In this case find g.

Solution.

a) f isn't an injective function $\Longleftrightarrow (\exists)\ x_1, x_2 \in Z$ with $x_1 \neq x_2$ and $f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) \Longleftrightarrow g \circ f \neq 1_E$.

Hence f must be an ingective function.

b) $g=f^{-1}([x])$, where $f^{-1}: f(Z) \longrightarrow Z$. Then

$$(g\circ f)(x) = f^{-1}([f(x)]) = f^{-1}(f(x)) = x, \ (\forall)x \in Z,$$

$$Z \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Z ;$$

and $(f\circ g)(x) = f(f^{-1}([x])) = [x] \neq x$ because $x \in R$,

$$R \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} Z .$$

95. PROPOSED PROBLEM

Let a and b be two elements from a group, the order of a is m and

$$a^n b^p = b^r a^n$$

If p divides r, calculate the order of b.

("College Mathematical Journal", USA, 1990)

Solution. Let's $r=kp$, $k \in N^*$, and the smallest common multiple $[m,n] = M$, $i=M/n$.

We denote the reverse of a with a'. One obtains:

$$b^p=(a')^n b^{kp} a^n \qquad (1).$$

We replace this relation into itself k times.

$$b^p=(a')^n \underbrace{b^p \dots b^p}_{k \text{ times}} a^n= (a')^n \underbrace{(a')^n b^{kp} a^n}_{1} \underbrace{(a')^n b^{kp} a^n}_{2} \dots$$

$$\dots \underbrace{(a')^n b^{kp} a^n}_{k} a^n = (a')^{2n} b^{k^2p} a^{2n} = \qquad (2)$$

(remplacing (1) in (2) it results:)

$$= (a')^{3n} b^{k^3p} a^{3n} = \dots = (a')^{in} b^{k^ip} a^{in} = b^{k^ip} \text{ (because}$$

$a^M = e = (a')^M$).

Hence $b^{p} = b^{k^{i}p}$ or $b^{k^{i}p \cdot p} = e$, whence

$ord(b) = p(r/p)^{[m,n]/n}$-1).

Remark.

For m=5, n=p=1, r=2 it obtains the Problema №7, concurs-oposicion a plazas de prof. agregados de Bachillerato 1984, Matematicas, Tribunal №1, Turno: Libre, R.L.1, R.L.2, Valladolid, Spanish, by Francisuo Bellot.

96. PROPOSED PROBLEM

Let a, b be real numbers, $0 < a \neq 1$; prove that there is a continuous, strictly decreasing function g(x) of the real line R into R such that $g(g(x)) = ax + b$.

(A partial generalization for the problem E3113, Amer. Math. Monthly, 9/1985).

Solution.

We construct a fuction $g : R \longrightarrow R$,

$$g(x) = -\sqrt{a} \cdot x + \frac{b}{1-\sqrt{a}} .$$

Thus $g(g(x)) = ax + b$, g is continuous and strictly decreasing.

Remark. For a=b=2 we obtain a question of the above- mentioned problem.

97. PROPOSED PROBLEM

Let p be a prime number. Prove that a square matrix of integers, having on each line and column an unique element nondivizible by p, is nonsingular.

Solution.

In accordance with the development of the matrix there exists an unique permutation, i.e. an unique term (= product) having as factors all these nondivizible elements by p.

This term isn't divizible by p, but all another ones are divided by p. Hence, sum (=value of the determinant) isn't divided by p, whence the determinant can't be null.

98. PROPOSED PROBLEM

Let $f(x) = ax^2+bx+c$ be a function of second degree, $f : R \longrightarrow R$, such that there are d, $e \in R$ for which $f(d) = e$. Prove that $b^2 + 4ae \geq 4ac$.

Solution.

Because $f : R \longrightarrow R$, it involves that:

$f(0) = c \in R$,

$f(1) = a+b+c \in R$ and $f(-1) = a-b+c \in R$ or

$a+b \in R$ and $a-b \in R$, whence $a \in R$ and $b \in R$.

The second degree equation $ax^2+bx+c-e = 0$ has at least a real solution $x_1=d$, and because all coefficients are real, we find $x_2 \in R$.

Hence $\Delta \geq 0$, or $b^2-4ac+4ae \geq 0$.

99. PROPOSED PROBLEM

Find two sequences $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ such that $\sum_1^\infty a_n$, $\sum_1^\infty b_n$, both diverge while $\sum_1^\infty \min\{a_n, b_n\}$ converges.

(On the problem E3125, AMM 1/1986)

Solution.

1) For example: $a_n = 0, 1, 0, 1, \dots$ and
$b_n = 1, 0, 1, 0, \dots$ hence
$\min\{a_n, b_n\} = 0$, for all $n \geqslant 1$.

2) More generally:

Let $\{c_n\}$ be a sequence such that $\sum_1^\infty c_n$ converges and all $c_n < 1$ (for example $\{1/n^s\}$ $n \geqslant 1$ with $s>1$), and $\{d_n\}$ another sequence such that $\sum_1^\infty d_n$ diverges and all $d_n \geqslant 1$.

We construct a_n, b_n as bellow:

$$a_n = d_1, \dots, d_{m_1}, c_{m_1+1}, \dots, c_{m_1+k_1}, d_{m_1+k_1+1}, \dots, d_{m_1+k_1+k_2}, \dots$$

$$b_n = c_1, \dots, c_{m_1}, d_{m_1+1}, \dots, d_{m_1+k_1}, c_{m_1+k_1+1}, \dots, c_{m_1+k_1+k_2}, \dots$$

Of course $\sum_1^\infty a_n$ and $\sum_1^\infty b_n$, diverge because:

$$\sum_{1}^{\infty} a_n > \sum_{1}^{\infty} d_n \text{ and } \sum_{1}^{\infty} b_n > \sum_{1}^{\infty} d_n\ , \quad \text{and}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\} = \sum_{1}^{\infty} c_n \text{ converges.}$$

100. PROPOSED PROBLEM

Let $d_n = p_{n+1} - p_n$, $n = 1, 2, \ldots$, where p_n is the n-th prime number.

Does the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n}$ converge?

Solution. The series is divergent.

From Tchebishev's theorem, it involves

$$p_{n+1} - p_n < p_n$$

(contrary to this it would involve that p_n and p_{n+1} are not consecutive).

Hence $\frac{1}{d_n} > \frac{1}{p_n}$ and $\sum_n \frac{1}{d_n} > \sum_n \frac{1}{p_n} = \infty$

[Published in "The Fibonacci Quarterly", Vol.30, Nov.1992, №4, pp.368-9, proposed problem B-726].

101. PROPOSED PROBLEM

Let f be a continuous and positive function on [a, b].

Calculate $\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b (f(x))^n \, dx\right)^{\frac{1}{n^2}}$, $a < b$.

Solution.

By mean theorem we find

$$\int_a^b (f(x))^n\, dx = (b-a)f(c)^n \ , \ c \in [a, b]$$

Then $L = \lim_{n\to\infty} f(c)^{\frac{1}{n}} \cdot (b-a)^{\frac{1}{n^2}} = 1$

Remark:

If f is positive on [a, b] it is well known that

$$\left(\int_a^b (f(x))^n\, dx\right)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow f(t) \ , \ t \in [a, b], \text{ whence}$$

L is equal to 1, too.

102. PROPOSED PROBLEM

Let (S) be a solution in integers for a linear equation with non-null integer coefficients

$$\text{(S)} \qquad x_i = \sum_{j=1}^{h} u_{ij}k_j + v_j, \qquad i \in = \{1, \dots, n\} \ ;$$

$x_1a_1 + \dots + a_nx_n = b$, where all u_{ij}, v_j are constant in Z, and all k_j are integer parameters. The author have proved (in [1] and [2]) that if (S) is a general solution then:

I) $h = n$-1;

2) $(u_{1j}, \dots, u_{nj}) = 1$, for all $j \in \{1, \dots, n\text{-}1\}$;

3) $(u_{i1}, \dots, u_{i,n-1}) = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$, for all $i \in = \{1, \dots, n\}$

But these three conditions are not sufficient.

QUESTIONS. A) Find other condition (s) still, so that (S) together with all these to be a general solution; (reciprocally).

B) A similar question in order that an integer solution of a linear system to be a general solution.

BIBLIOGRAPHY. [1] - Florentin Smarandache, Rezolvarea in numere întregi a ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii liniare. Lucrare de licenţă, Univ. of Craiova, 1979.

[2] - Idem. Whole Number Algorithms to solve Linear Equations and Systems. Ed. Scientifiques, Casablanca, 1984. see Zentrallblatt fur Mathematik (Berlin).

103. PROPOSED PROBLEM

Prove that from a non-constant arithmetical progression of $((2m-3)\cdot 3^n + 1)/2$ terms one can extract $(m-1)\cdot 2^n$ distinct terms such that any m of them do not constitute an arithmetical progression. ("Nieuw Archief voor Wiskunde"), 1988, №2, problem №809, p.171, and "The Mathematical Intelligencer", Vol. 11, №1, 1989).

* Find the greatest extraction with this property.

Solution. It's sufficient to make as non-constant arithmetical progression N* (see [1], p. 69).
One constructs the sets sequence:

$A_1 = \{1, 2, \dots, m-1\}$;

$A_{n+1} = A_n \cup (A_n + 2a_n - 1)$, for $n \geqslant 1$,

where $a_p = \max\{a \mid a \in A_p\}$ and $A+x = \{a+x \mid a \in A\}$.

Of course $a_1 = m-1$, $a_{n+1} = 3a_n - 1$, for $n \geqslant 1$, whence

$a_{n+1} = 1/2\,[(2m-3)3^n+1]$. Also, Card $A_{n+1} = (m-1)\cdot 2^n$.

Each A_n has the property of the problem, because:

for A_1 it is abvious;

if it is true for A_n, then:

for $m \geqslant 4$ we have $(a_{n+1} - b_1)/(m-1) < b_{n+1} - a_n$,

where $b_p = \min\{a \mid a \in A_p\}$; for m=3, if $x_1 \in A_n$ and $x_3 \in A_{n+1} \setminus A_n$ then $x_2 = \frac{1}{2}(x_1+x_2) \notin A_{n+1}$;

for m=2 we prove there are not $(x, y) \neq (z, t)$ from A^2_{n+1} such that $|x-y| = |z-t|$, that is $|3^a-3^b| = |3^c-3^d|$, or we can suppose $3^a+3^d = 3^b+3^c$;

let's $a = \min\{a, b, c, d\}$; then $d = \max\{a, b, c, d\}$;

then $1+3^{d-a} = 3^{b-a}+3^{c-a}$, or $1 \equiv 0 \pmod 3$ impossible.

*The author isn't able to answer to this question.

Remarks. This problem is valid for a non-constant geometrical progression too (see [1], p.69).

It is a generalization of the Problem 5, Mathematics International Olympiad, Paris, 1983;

(When m=3, $(m-1)2^n \geq 1983$ and $1/2[2m-3)3^n+1] \leq 10^5$)

References:

[1]. F. Smarandache "Problemes avec et sans ... problemes!", Somipress, Fes, Morocco, 1983!

[2]. T. Andreescu & Co., "Probleme date la concursurile și examenele din 1983", Timișoara.

104. PROPOSED PROBLEM

Let n be odd and m be even numbers. Consider a number of points inside a convex n-gon. Is it possible to connect these points (as well as the vertices of the n-gon) by segments that do not cross one another, until the interior is subdivided into smaller disjoint regions that are all m-gons and each given point is always a vertex of any m-gon containing it?

Answer: No.

Solution (after a Honsberger and Klamkin's idea): against all reason let p be the number of smaller m-gons, and i the number of interior points.

The sum of the angles of the p smaller m-gons is $\pi(m-2)p$; also, the sum of the angles of the n vertices of the convex n-gon is $\pi(n-2)$. Thus

$\pi(m-2)p = 2\pi i + \pi(n-2)$ or $p(m-2) = 2i + n - 2$,

but the right part is even while the left part is odd!

Remark: It's a generalization of [1], and of a problem of [2].

References:

[1] Problem 4, solution by M.S.Klamkin, 1979 Michigan Mathematics Prize Competition, Crux mathematicorum, Vol.11, №1, january, 1985, p.7, Canada.

[2] Ross Honsberger, Mathematical Gems, Mathematical Associations of America, 1973, pp.106, 164.

[3] R.N. Gaskell, M.S. Klamkin, and P. Watson, Triangulations and Pick's theorem, Math. Magazine, 49(1976), pp.35-37.

105. PROPOSED PROBLEM

Prove there exist infinity of primes containing the digits $a_1, a_2, \ldots, a_m$ on positions $i_1, i_2, \ldots,$ respectively i_m, with $i_1 > i_2 > \ldots > i_m \geqslant 0$. (Of course, if $i_m=0$ then a_m must be odd). ("Mathematics Magazine", April 1990)

Solution.

a) Let $i_m > 0$. We construct the number

$$N = \underbrace{a_1 0 \ldots 0}\ \underbrace{a_2 0 \ldots 0}\ \underbrace{a_3 0 \ldots 0}\ \underbrace{a_m 0 \ldots 01}$$

such that each a_j is on positions i_j, another positions being equal to zero, without the last one equale to 1. We construct an arithmetical progression

$$x_k = N + k \cdot 10^{i_1+1},\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

From Dirichlet's theorem we find our result.

b) $i_m = 0$. Same proof, but on last position of N we take a_m.

106.PROPOSED PROBLEM

Let n be a positive integer of two or more digits, not all egual.

Ranging its digits by decreasing, respectively in creasing order, and moking treir difference, one finds another positive number n_1. One follows this way, obtaining a series: $n_1, n_2, n_3, \ldots,$. (For example, if $n=56$, then $n_1=65-56=09$ $n_2=90-09=81$, etc).

Prove that this series is periodical (i.e., of the form: $a_1, \ldots a_l, b_1, \ldots, b_p, b_1, \ldots b_p, \ldots$).

[On the Kaprekar's algoritm.]

Solution.

Let m be the number of digits of $n, m \geq 2$ of course, for all $i \in N$.

$$n_i \in \{1,2,\ldots,10^m-1\}.$$

In that situation, taking 10^m numbres of m digits each one (that means 10^m numres of the series), it finds at least two equal numbers (from the Dirichlet principle). Let they be n_p and n_t in tne series. Since $n_s=n_t$ and the way to obtain n_{s+1} by means of n_p is same with the way to obtain n_{t+1} by means of n_t, it involves $n_{s+1}=n_{t+1}$, hence $n_{s+2}=n_{t+2}$, etc.

Example. Let $n=90000$. Then:

$$n_1 = 90000 - 00009 = 89991$$
$$n_2 = 99981 - 18999 = 80982$$
$$n_3 = 98820 - 02889 = 95931$$
$$n_4 = 99531 - 13599 = 85932$$
$$n_5 = 98532 - 23589 = \boxed{74943}$$
$$\boxed{n_6 = 97443 - 34479 = 62964}$$
$$n_7 = 96642 - 24669 = 71973$$
$$n_8 = 97731 - 13779 = 83952$$
$$n_9 = 98532 - 23589 = \boxed{74943}$$
$$\boxed{n_{10} = 97443 - 34479 = 62964}$$

. . . .

Remarks.

For 3 and 4 digits Kaprekar showed that the period length is just one, i.e. the series is stationary always equal to 495, respectively 6174.

Look:

528, 594, 495, 495, 495, ...

respectively:

8031, 8172, 7443, 3996, 6264, 4176, 6174, 6174,..

Reference:

Pierre Berloquin, "Le jardin du Sphnx", Bordas, Paris,1981; probleme 37 (L'Algorithme de Kaprekar), pp.61,146.

107. PROPOSED PROBLEM

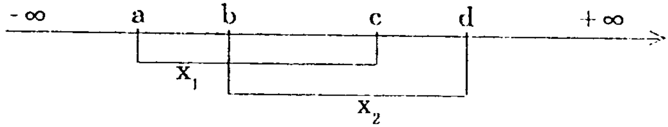
Assume the second degree equation $Ax^2 + Bx + C = 0$ has the real solution x_1 and x_2 and , $a<b<c<d$ are real numbers. On what terms must the real coefficients A,B,C be such that:

a) $x_1 \in (a,\ c)$ and $x_2 \in (b,\ d)$;

b) $x_1 \in (b,\ c)$ and $x_2 \in (a,\ d)$.

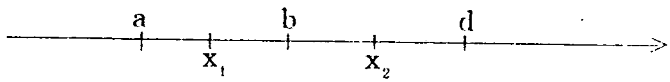
Solution. Let's note $f(x)=Ax^2 + Bx + C$, $\Delta = b^2 - 4AC$ and $S = x_1 + x_2 = -B/A$

a)



We can have the follwing cases:

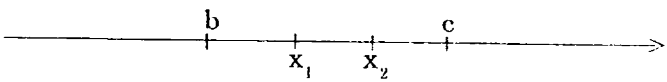
I. $x_1 \in (a,\ b)$, $x_2 \in (b,\ d)$



Whence it involves the conditions (C1):

$\Delta > 0$, $Af(a)>0$, $Af(b)<0$, $Af(d)>0$;

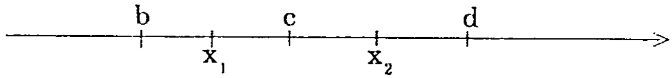
or II. $x_1 \in (b,\ c)$, $x_2 \in (b,\ c)$



Whence it involves the conditions (C2):

$\Delta \geq 0$, $Af(b) \geq 0$, $Af(c) \geq 0$, $2b<S<2c$;

or III. $x_1 \in (b, c)$, $x_2 \in (c, d)$

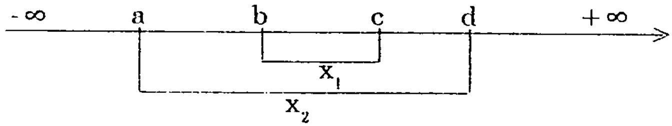


Whence it involves the conditions (C3):

$\Delta > 0$, $Af(b) \geq 0$, $Af(c) < 0$, $Af(d) > 0$;

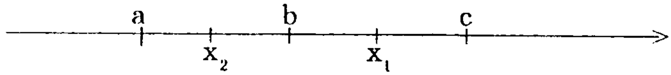
Hence A, B, C must accomplish the conditions:

(C1) $\cup$ (C2) $\cup$ (C3).

b) 

We can have the follwing cases:

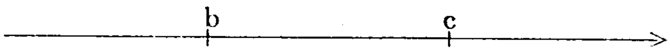
I. $x_1 \in (b, c)$, $x_2 \in (a, b)$



Whence it involves the conditions (K1):

$\Delta > 0$, $Af(a) > 0$, $Af(b) \leq 0$, $Af(c) > 0$;

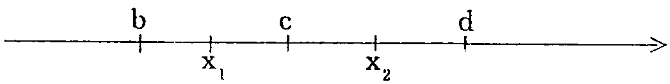
or II. $x_1 \in (b, c)$, $x_2 \in (b, c)$



Whence it involves the conditions (K2):

$\Delta \geq 0$, $Af(b) > 0$, $Af(c) > 0$, $2b < S < 2c$;

or III. $x_1 \in (b, c)$, $x_2 \in (c, d)$



Whence it involves the conditions (K3):

$\Delta > 0$, $Af(b)>0$, $Af(c)\leq 0$, $Af(d)>0$.

Hence A, B, C must accomplish the conditions:

(K1) $\cup$ (K2) $\cup$ (K3).

108. PROPOSED PROBLEM

Let $n, m \in N$ and let S be a set of $nm+1$ points in space such that any subset of S consisting of $m+1$ points contains two points with distance less than d (a given positive number).

Prove that there exists a sphere of radius d containing at least $n+1$ points of S in its interior.

("Nieuw Archief voor Wiskunde", Vierde Serie deel 5, №3,November 1987, proposed problem №797, pp.375-6.

Particular case (d=1) in "Crux Mathematicorum", Vol.14, №5, May 1988, problem 1344, p.140).

Solution.

Let A_1 be a point in space. We choose an A_2 for which $|A_1A_2|\geq d$. (If it there isn't, our problem is solved.) Afterwards we choose an A_3 with the same property ($|A_iA_j|\geq d$, $i\neq j$), etc. The method ends when we can't add another point with this property.

Clearly, we have at most m points A_1, A_2, ..., A_p, where $1\leq p\leq m$, with this property. Distributing the $nm+1$ points in p classes corresponding to A_1, A_2, ..., A_p there exists a sphere of radius d and center A_i which contains at least $n+1$ points in interior (Dirichlet principle).

Remark: This is a generalization of a problem proposed by prof. Mircea Lascu.

109. PROPOSED PROBLEM

How many digits on base b does the n-th prime contain? But n! ? But n^n ?

("PI MU Epsilon Journal", USA, 1992).

Solution by Paul T.Bateman, University of Illinois at Urbana-Champaigh, USA.

The number of digits of the number N to the base b is the integral part of 1+log N / log b. Thus the number of digits of n^n is $\lfloor 1+n\cdot\log n / \log b \rfloor$.

The known formula

$$n\cdot\log n < p_n < n\cdot\log n\,(1+ \delta(n))$$

and

$$n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} < n! < n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\,(1+ \varepsilon(n)),$$

where $\delta(n)$ and $\varepsilon(n)$ are positive quantities which approach zero when n is large, make it possible to approximate the number of digits in p_n or n! within one unit for large n.

Reference: Paul T.Bateman, Letter to the Author, February 8, 1988.

110. PROPOSED PROBLEM

Let $m \in N$, $m>1$. Is there a positive integer n having the property: anyhow one chooses n integers their sum is divided by m?

Solution: No.

If, against all reason, there would be such n, then taking the sets A and B of integers:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad \text{with } S = \sum_1^n a_i ,$$

$$B = \{a_1+1, a_2, \ldots, a_n\} \quad \text{with } S' = S+1 ,$$

it would result that $S'-S = 1$ is divided by m.

111. PROPOSED PROBLEM

Prove that anyhow an infinite arithmetical progression is divided into n sets, at least one of the sets contains m arithmetical progressions triplets.

Is this result still true when n (or m) $\to \infty$?

("Nieuw Archief voor Wiskunde", Vierde Serie Deel 12, №1-2, Maart/Juli 1994, p.93)

Solution. It's sufficient to take as arithmetical progression N^* (see [1], p.69). One decomposes N^* in $n \cdot m$ arithmetical under-progressions:

$$a_h^{(i)} = i+(n \cdot m)h, \; h=0, 1, 2, 3, \ldots$$

for all $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n \cdot m\}$.

The arbitrary division of N* is equivalent to the arbitrary division of these under-progressions.
From Van der Waerden's theorem, if each under-progression $a_n^{(i)}$ is divided in two sets $M_1^{(i)}$ and $M_2^{(i)}$, at least one contains an arithmetical progression triplet. In all there are n·m sets which contain each one an arithmetical progression triplet, in the end, these from behind are distributived in n classes (the box principle).
* The author is not able to answer this question.
Remark. This problem is valid for the geometrical progressions, too (see [1], p.69).

Reference:

[1] F.Smarandache "Problemes avec et sans ... problemes!", Somipress, Fes, Morocco, 1983.

112. PROPOSED PROBLEM

Prove that if $n \geq 3$ then between n and n! there are at least $3\left[\frac{n}{2}\right] - 2$ prime numbers.

Solution.

a) Let $n=2k+1$, with $k \geq 1$.

$$n! = 2^k \cdot k! \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)n > 2^{3k-2} \cdot k! \cdot n \geq 2^{3k-2} \cdot n,$$

and by Bertrand-Chebishev's theorem, applied of $3k-2$ times, $k = \left[\frac{n}{2}\right]$, we find our result.

b) The same proof when $n=2k$, with $k>2$.

113. PROPOSED PROBLEM

Prove that there exists at least five primes of s digits, $s \geq 2$.

Solution.

Because for $n \geq 4$ we have that:

between n and $\frac{s}{2}n$ there exists at least a prime (see [1]), one obtains that:

between $\frac{3}{2}n$ and $\frac{3^2}{2^2}n$ there exists at least a prime;

....

between $\frac{3^4}{2^4}n$ and $\frac{3^5}{2^5}n$ there exists at least a prime.

Hence, between n and $\frac{3^5}{2^5}n$ there exists at least five prime numbers (the approximation is very gross).

Taking $n=10^{s-1}$ we have that between 10^{s-1} and $\frac{3^5}{2^5}\cdot 10^{s-1}$ we have at least five primes, but

$$\frac{3^5}{2^5}\cdot 10^{s-1} < 10^s .$$

Reference.

[1] I. Cucuruzeanu, "Probleme de aritmetică și teoria numerelor", ed. Tehnică, București, 1976, pp.108 (problema III.48*) și 137-140.

114. PROPOSED PROBLEM

Find the n-th term of the following sequence:

1,3,5,7,6,4,2,8,10,12,14,13,11,9,15,17,19 ...

Generalization.

Solution.

Let φ be the following permutation:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

then $a_{7k+r} = 7k + \varphi(r)$, where $0 \leq r \leq 6$, $k \geq 0$.

Generalization:

For any permutation φ of m elements:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_m \end{pmatrix}$$

we have $a_{mk+r} = m \cdot k + \varphi(r)$, where $0 \leq r \leq m-1$, $k \geq 0$.

115. PROPOSED PROBLEM

Find the general term formula for the following sequence:

1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6,6,7,7,7,7,7,7,7,8,8, 8,8,8,8,8,8, ...

(the natural sequence where each number n is repeated n times).

Solution.

For $r \geq 1$, we have

$$a_{\frac{r(r+1)}{2}-k} = r, \text{ where } 0 \leq k \leq r-1.$$

116. PROPOSED PROBLEM

Find a partition on N^* into an infinite number of distinct classes (not all of them finite) such that no classes contain an arithmetic progression of three terms.

Solution:

Let M be the set of all positive integers which are not perfect power:

$$M = \{2,3,5,6,7,10,11,12,13,14,15,17,18,19,20,21,22, \dots\}$$

For any $m \in M$ we define

$$C_m = \{m^k;\ k=1,\ 2,\ 3,\ \dots\}.$$

Then:

$$N^* = \{1\} \cup \bigcup_{m \in M} C_m.$$

There are an infinite number of classes C_m, because M is infinite and no classes C_m contain an arithmetical progression of three terms (or more) - because all C_m are non-constant geometric progressions.

117. PROPOSED PROBLEM

Let $a_1, a_2, \dots, a_m$ be digits.

Are there primes, on a base b, which contain the group of digits $\overline{a_1 a_2 \dots a_m}$ into its writing?

(For example, if $a_1=0$ and $a_2=9$, $b=10$, there are primes as 1<u>09</u>, 4<u>09</u>, 7<u>09</u>, 8<u>09</u>, ...)

*The same questions replacing "primes" by numbers of the form n! or n^n.

Solution.

Let $N = \overline{a_1 a_2 \dots a_m 1}$, and the following arithmetical progression:

$$x_k = N + k \cdot b^{m+1}, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots .$$

Using Dirichlet's theorem on primes in arithmetical progression, we find that there exist an infinity of primes with the required property.

*The author is not able to answer this last question. He conjectures that generally speaking the answer is <u>*no*</u>.

118. PROPOSED PROBLEM

Find a natural number N such that, if:

1) a q_1th part of it and a_1 more are taken away;

2) a q_2th part of the remainder and a_2 more are taken away;

3) a q_3th part of the second remainder and a_3 more are taken away;

....

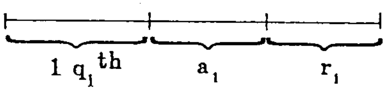
s) a q_sth part of the s-1th remainder and a_s more are taken away;

the last remainder is r_s.

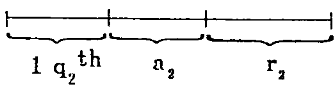
Solution:

One uses a backwards arithmetic way.

Consider the problem for the particular case s=3 (only three steps).

I) 

$$(a_1+r_1)\cdot\frac{q_1}{q_1-1} = N$$

II) 

$$(a_2+r_2)\cdot\frac{q_2}{q_2-1} = r_1$$

(by notation)

III) $\underbrace{\qquad}_{1q_3^{th}}\underbrace{\underbrace{\qquad\quad}_{a_3}\underbrace{\qquad\quad}_{r_3}}_{q_3\text{-}1 \text{ of } q_3^{th\text{-}s}}$ $\qquad (a_3+r_3)\cdot\dfrac{q_3}{q_3-1}=r_2$
(by notation)

Therefore: $N = (a_1+(a_2+(a_3+r_3)\dfrac{q_3}{q_3-1}\cdot)\dfrac{q_2}{q_2-1}\cdot)\dfrac{q_1}{q_1-1}$.

One can generalize and prove by induction that:

$$N = (a_1+(a_2+\ldots+(a_{s-1}+(a_s+r_s)\frac{q_s}{q_s-1})\frac{q_{s-1}}{q_{s-1}-1}\ldots)\frac{q_2}{q_2-1})\frac{q_1}{q_1-1}.$$

119. UNSOLVED PROBLEMS

[International Congress of Mathematicians, Berkeley, CA, USA, 1986, Section 3, Number Theory]

SMARANDACHE, FLORENTIN GH., University of Craiova, Romania. An infinity of unsolved problems concerning a function in number theory.

We have constructed a function η which associates to each non-null integer m the smallest positive n such that n! is a multiple of m. Let $\eta^{(i)}$ note $\eta\circ\eta\circ\ldots\eta$ of i times.

Some Unsolved Problems concerning η.

1) For each integer $m>1$ find the smallest k and the constant c for which $\eta^{(k)}(m) = c$.

2) Is there a closed expression for $\eta^{(n)}$?

3) For a fixed non-null integer m, does $\eta^{(n)}$ divide n-m?

4) Is η an algebraic function?

5) Is 0.0234537465114 ..., where the sequence of digits is $\eta^{(n)}$, $n \geq 1$, an irrational number?

6) For a fixed integer m, how many primes have the form $\overline{\eta^{(n)}\eta^{(n+1)} \ldots \eta^{(n+m)}}$?

Solve the diophantine equations and inequations:

7) $\eta^{(x)y} = x\eta^{(y)}$, for x and y not primes.

8) $n^{(x)}-y = x/\eta^{(y)}$, for x and y not primes.

9) Is $0 < \{x/\eta^{(x)}\} < \{\eta^{(x)}/x\}$ infinitely often? ,

where $\{a\}$ is the fractional part of a.

10) Find the number of partitions of n as sum of $\eta^{(m)}$, with $2<m<n$.

By means of η* we construct recursively an infinite of arithmetic functions and unsolved problems.

*This function has been called THE SMARANDACHE FUNCTION (see "Personal Computer World", "Mathematics Reviews", "Fibonacci Quarterly", "Octogon", "Mathematical Spectrum", "Elemente de Mathematik", "Bulletin of Pure and Applied Science" etc.) [Editor's note].

Florentin SMARANDACHE

PROPOSED PROBLEMS OF MATHEMATICS

(Vol.II)

Semnat pentru tipar 12.XII.97. Formatul 60x84 1/16.
Rotaprint. Coli de tipar 6,0.
Comanda 268. Preț contractual.

Secția poligrafie operativă
a U.S.M. 2009. Chișinău,
str. A.Mateevici, 60