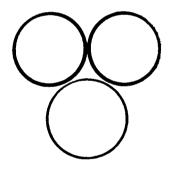
### FLORENTIN SMARANDACHE

### PROBLEMES avec et

### sans...PROBLEMES!

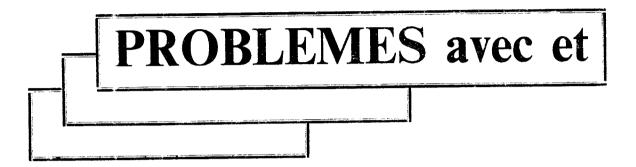


Traduits du Roumain par l'auteur et Sophie Mugnier Professeurs de Mathématiques

> SOCIETE MAROCAINE D'IMPRESSION ET D'EQUIPEMENT S.A.R.L SOMIPRESS

> Siège Sociale : 72, Boulevard Hassan II Tél. : 238-68 - FES ( v. n. )

### FLORENTIN SMARANDACHE



## sans...PROBLEMES!

Traduits du Roumain par l'auteur et Sophie Megnier Professeurs de Mathématiques

> SOCIETE MAROCAINE D'IMPRESSION ET D'EQUIPEMENT S.A.R.L SOMIPRESS

> Siège Sociale : 72, Boulevard Hassan II Tél. : 238-68 - FES ( v. n. )

/- LORENTIN MARAHDACHE

// PROBLEMES //- )VEC // T \_/ ANS ... // ) ROBLEMES !

// raduits du roumain par l'auteur et
Sophie Mugnier,
Professeurs de Mathématiques

Couverture : Ichaab SERGHINI

L'autour autorise la reproduction de ses problèmes à la scule condition de citer son nom et les références du présent ouvrage .

(c) Imprimerie SOMIPRESS, 1983 , Edition Française , FES. Tous droits de traduction , de reproduction et d'a-daptation réservés pour tous pays .

# /-)VANT - // )) ROPOS

Le livre s'adresse aux élèves du lycée, aux étudiants et aux professeurs. Il contient 140 problèmes originaux publiés par l'auteur dans les revues scientifiques. Les problèmes sont utiles pour préparer les concours, les examens, les olympiades mathématiques. Beaucoup d'est ont un caractère généralisé.

Pour chaque problème on donne une solution détaillée.

L'AUTEUR

### ABLE // )ES //)/)ATIERES

---==000==----

7.	PROBLEMES DISTRAYANTS	5
2.	ARITHIETIQUE	16
3.	LOGIQUE MATTEMATIQUE	39
4.	TRIGONOMETRIE	42
5.	GEOMETRIE	48
б.	ANALYSE	,68
7。	ALGEBRE	84

-0==0=

1.1. Quatre équipes de footfall : A, B, C et D ont participé a un tournoi. Le classement final n'a pas été entièrement gardé, les chiffres essuyés étant indiqués par des étoiles (classement, équipe, nombre des matchs joués, des victoires, des matchs mls, des défaites, buts marqués, buts nomissés, nombre des points manés):

l.	A	3	* * *	5 <del>-</del> 2	6
2.	В	*	* * 2	3 - 3	*
3.	C	3	* * *	4 - *	*
4.	D	3	* * *	1 - 4	*

Les équipes ont été départagées par les critères connus du football, et le classement élaboré de mame.

- a) Compléter le classement.
- b) Trouver le résultats de tous les matchs disputés.

#### SOLUTION:

a) L'équipe A a joué 3 matchs, donc A a joué aussi contre B. De même pour C et D. D'où, B a joué 3 matchs. A a 6 points en 3 matchs, donc A a gagné tous les matchs, c'est-à-dire A a 3 victoires, zéro match nul et zéro défaite. Ba 2 défaites, mais B occupe la deuxième place. Il en résulte que le troisième match de B est une victoire, parque que :

si ce match est nul, alors C et D auront ensemble 6.2 - (6 + 1) = 5 points et donc au moins l'une d'elles aura plus de points que B. Ainsi Ba 2 points.

C et D ont ensemble 6.2 - (6 + 2) = 4 points. D'où C et D ont tout les deux 2 points, puisqu'autrement il en résulterait qu'au moins l'une de C et D aurait plus que B.

Donc C a une victoire, zéro atch nul et 2 défaites. De même pour D. (C et D ne peuvent pas obtenir les 2 points de deux matchs nuls, parce que A et B n'ont aucun match nul.) C a encaissé

(5 + 3 + 4 + 1) - (2 + 3 + 4) = 4 buts. It classement complet est:

l.	A	3	300	5 <b>–</b> 2	6
2.	${\mathbb B}$	3	102	3 - 3	2
3.	C	3	102	4 - 4	2
4.	D	3	102	1 <b>-</b> 4	2

On sait que dans un classement, la somme des buts marqués par toutes les équipes est égale à la somme des buts encaissés par toutes les équipes.

b) On détermine les pronostics des matchs.

A a 3 victoires, donc A - B = 1, A - C = 1, A - D = 1.

B et C ont le même nombre de points, la même différence entre les buts marqués et les buts encaissés, le même nombre de victoires, mais B occupe une place supérieure à C, il en résulte que B-C=1, d'où B-D=2, puis C-D=1. D a marqué un seul but et a une seule victoire, donc B-D=0-1. A a 3 victoires, 5 buts marqués et 2 buts encaissés; la différence est 5-2=3. Alors A a eu les résultats : 1-0, 1-0, 3-2 ou 1-0, 2-1, 2-1. Comme A-D=1 et D a marqué son seul but contre B, il en résulte : A-D=1-0, d'où l'on tire C-D=3-0.

Ia situation est:

I.	A	2	200	4 - 2	4
			101	3 - 2	2
3.	C	2	002	1 - 4	0

avec les pronostics antérieurs.

A peut avoir les résultats : 1-0, 3-2 ou 2-1, 2-1. On observe qu'on ne peut avoir ni le résultat A-B=3-2, puisque B n'a enregistré que 2 buts, ni A-B=3-2, puisque C ne peut plus marquer qu'un but. Donc, il reste l'alternative 2-1, 2-1, d'  $\hat{u}$  A-B=2-1, A-C=2-1 et on obtient B-C=2-0. Les résultats exacts sont :

$$A - B = 2 - 1$$
,  $B - C = 2 - 1$ ,  $A - D = 1 - 0$ ,  $B - C = 2 - 0$ ,  $B - D = 0 - 1$ ,  $C - D = 3 - 0$ .

1.2. A la fin d'un tournoi de fottball entre les équipes A . . 8 - C3, 0 le classement était le suivant :

1.	A	3	201	2 - 1	4
2.	${\mathtt B}$	3	201	2 - 1	4
3.	C	3	111	4 - 4	3
4.	D	3	012	3 - 5	1

Les critères qui ont départagé les équipes étant :

- a) le nombre des points accumulé;
- b) la différence entre les buts marqués et les buts encaissés;
- c) le nombre des victoires;
- d) la victoire directe contre une équipe.

Trouver tous les résultats des matchs.

#### SOLUTION:

Tout d'abord on détermine les pronostics exacts des matchs joués.

Les équipes A et B ont le même nombre de points, la même différences entre les buts marqués et les buts encaissés, le même nombre de victoires, mais A occupe la première place pendant que B la deux nème. D'où A - B = 1 (c'est-à-dire, A a gagné le jeu). B a deux victoires et une défaite, donc B - C = 1 et B - D = 1. Les équipes C et D sont les seules qui ont chacune un jeu égal. Alors C - D = X (où X signifie le match égal). A a une défaite, alors  $\Lambda$  - C = 2. Les pronostics exacts sont :

$$A-B=1$$
,  $A-C=2$ ,  $A-D=1$ ,  $B-C=1$ ,  $B-D=1$ ,  $C-D=X$ 

Déterminons les résultats.

Puisque A a 2 victoires et seulement 2 buts marqués, donc ces victoires sont obtenues par 1-0, 1-0. On a donc A-B=1-0 et A-D=1-0, d'où A-C=0-1. Manière analogue pour B on a B-C=1-0 et B-D=1-0, et on donne C-D=3-3. Les résultats exacts sont :

$$A-B = 1-0$$
,  $A-C = 0-1$ ,  $A-D = 1-0$ ,  $B-C = 1-0$ ,  $B-D = 1-0$ ,  $C-D = 3-3$ .

1.3. A' l'élaboration du classement de football suivant, quatre fautes ont été faites , l'ordre des équipes restant le même :

1.	A	3	210	1-0	5
		2		5-4	2
			102	6-6	2
		3	~	2-5	2

a) Quelles sont les fautes ?

b) En corrigeant ces fautes, trouver les résultats de tous les matchs joués.

#### SOLUTION :.

a) Auisque A, C, D ont joué 3 matchs il en résulte que B aussi a joué 3 matchs (on ne peut pas avoir 2 matchs joués pour chaque équipe, parce qu'il y aurait plus de quatre fautes dans le classement). Le troisième match de B ne peut pas être une victoire, parce qu'il y aurait en tout  $5 + 4 + 2 + 2 = 13 \neq 12$  points (on ne peut pas faire d'autres modifications sur les points de A, C ou D, puisqu'on obtiendrait plus de quatre fautes).

De manière analogue, le troisième match de B ne peut pas être une défaite. Donc B a un match nul ( la troisième faute). A a 2 victoires et un seul but marqué. Le norbre des buts marqués 1 + 5 + 6 + 2 = 14 \( \frac{1}{2} \) = 0 + 4 + 6 + 5 qui est le nombre des buts encaissés pour toutes les équipes. D'où A a marqué 2 bûts (la quatrième faute). (On ne peut pas faire des modifications sur les buts encaissés par A ou par les autres pour la même raison).

b) Le classement correct est:

1.	A	3	2 1 0	2 - 0	5
2.		3	111	5 <b>–</b> 4	3
3.		3	102	6 <b>-</b> 6	2
1.		3	021	2 - 5	2

1º) Il faut établir les pronostics exacts.

D a 2 matchs nuls et A et B ont chacun un match nul.

Alors A - D = X, B - D = X. L'équipe A a encore 2 victoires. Donc

A - B = 1, A - C = 1. De B - D = X et A - B = 1 on tire B - C = 1,

parce que B a une victoire. De même C - D = 1. Les pronostics exacts
sont:

A-B = 1, A-C = 1, A-D = X, B-C = 1, B-D = X, C-D = 1.

2°) Maintenant, il cuffit d'établir les résultats exacts. A a 2 victoires et 2 buts marqués. Alors A-B=1-0, A-C=1-0. Parce que A n'a encaissé aucun but, on a A-D=0-0. En retirant l'équipe A du classement (avec tous ses résultats), on obtient un sous-classement:

```
2. B 2 110 5-3 3
3. C 2 101 6-5 2
4. D 2 011 2-5 1
```

avec les pronostics connus : B-C=1, B-D=X, C-D=1B a une victoire et zéro défaite et la différence de buts 5-3=2. D'où : B-C=2-0 ou 3-1 ou 4-2 ou 5-3. C a une victoire, et la différence de buts 6-5=1; mais puisque B a battu C de 2 buts, C gagne donc de trois buts contre D. D'où C-D=3-0 ou 4-1.

Si on a C - D = 3 - 0, alors on a B - C = 5 - 3, et B - D = 0 - 0. Mais ça signifie que D a zéro but marqué. Contradiction. Donc C - D = 4 - 1. Et on a : B - C = 4 - 2, B - D = 1 - 1. Ces derniers résultats vérifient le classement. Les résultats sont : A - B = 1 - 0, A - C = 1 - 0, A - D = 0 - 0, B - C = 4 - 2, B - D = 1 - 1, C - D = 4 - 1.

Le problème est déterminé de façon unique. Le problème est complétement démontré. 1.4. Pour les préliminaires du championnat mondial de football on dispute, aller et retour, les matchs d'un groupe de 5 équipes où se qualifient les 2 premières.

Déterminer le nombre minimum de points pour lequel une équipe peut se qualifier, et aussi les résultats qui favorisent la qualification.

Généraliser dans le cas d'un groupe de n équipes, où se qualifient les m premières ( l  $\leq$  m  $\leq$  n ).

#### SOLUTION:

Resolvons directement pour le cas général, l'autre cas résultant par particulisation.

Dans un groupe de n équipes se disputent :

 $2 \cdot (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = n \cdot (n-1)$  matchs. Le nombre total des points est  $2n \cdot (n-1)$ . Si m=1, le nombre minimum de points sera  $2n \cdot (n-1)$  :  $n=2 \cdot (n-1)$  points (toutes les équipes ont le même nombre de points, mais celle qui aura la plus grande différence entre les buts marqués et ceux encaissés va se qualifier. Si l'une des équipes a moint de  $2 \cdot (n-1)$  points, alors il en existera une autre qui en aura plus de  $2 \cdot (n-1)$ , puisque le nombre total de points est égal à  $2n \cdot (n-1)$ . Si m=n, bien sûr, le nombre minimum de points est zéro.

Le cas 1 < m < n. L'équipe qualifiée avec le nombre minimum de points sera la m - ième. Pour qu'elle ait le minimum de points il faut que les (m-1) premières équipes obtiennent le maximum de points possible. D'où l'équipe h - ième, 1 < h < m - 1, aura 4 (n - i) points. Les (m-1) équipes auront  $4 (n-1) + 4 (n-2) + \cdots + 4 (n-m+1) = 2 (m-1) (2 n-m)$  points. Du nombre total de 2 n (n-1) points on enlève les points des (m-1) premières équipes et on trouve 2 (n-m) (n-m+1), qui représente les points des (n-m+1) dernières équipes. Donc 2 (n-m)(n-m+1) = 2 (n-m), qui est le n-m+1

nombre minimum de points tel qu'une équipe puisse se qualifier.

- 4.5. A un concours de pronostics concernant 13 matchs de football, une personne joue en utilisant m doublets et n triplets, 0 ≤ m + n ≤ 13, m, n ∈ //(/.
  - a) Dans le cas où il obtient une variante à 13 résultats exacts, implicitement combien de variantes à 12 et à 11 résultats exacts obtient-il ?
  - b) De même, s'il obtient une variante à 12 résultats exacts, implicitement combien de variantes à 11 et à 10 résultats exacts va-t-il obtenir?

#### SOLUTION:

Il y a 13 matchs et pour chacun il existe trois possibilités:

1, X ou 2 (c'est-à-dire, rapporté à la première équipe, victoire, match nul ou défaite). On a en tout 213 variantes possibles (plus de 1.000.000). Ayant m doublets et n triplets, il en résulte qu'on a 13 - m - n solitaires (c'est-à-dire) des matchs pour lesquels on donne un seul pronostic). On forme 2 n. 2 variantes en tout.

- a) On obtient m + 2n variantes à 12 résultats exacts. Si m > 2 et n > 2 on a  $C_m^2 + 4 \cdot C_n^2 + 2 \cdot mn$  variantes à 11 résultats exacts; si m > 2 et n < 2 on a  $C_n^2 + 2 \cdot mn$ ; si m < 2, n > 2 on a  $4 \cdot C_n^2 + 2 \cdot mn$ ;
- b) Le cas : où un solitaire est faux. Alors il en résulte :

 $\begin{cases} \text{m+2n variantes à 11 résultats exacts.} \\ \text{c } \frac{2}{\text{m}} + 4 \cdot \text{c } \frac{2}{\text{n}} + 2 \cdot \text{mn variantes à 10 résultats exacts, ni m} \\ \text{2,} \\ \text{n}, \text{2.} \\ \text{4. C } \frac{2}{\text{n}} + 2 \cdot \text{mn , si m} \\ \text{2, n}, \text{2, variantes à 10 résultats exacts.} \\ \text{C } \frac{2}{\text{m}} + 2 \cdot \text{mn , si m}, \text{2, n} \\ \text{2 mn , si m}, \text{2, n} \\ \text{2, n} \\ \text{2, n} \\ \text{2, variantes à 10 résultats exacts.} \end{cases}$ 

Le cas : où un doublet est faux.

On a  $\begin{cases} (m-1) + 2n \text{ variantes à 11 résultats exacts.} \\ c \frac{2}{m} - 1 + 4 \cdot c \frac{2}{n} + 2 \cdot (m-1) \text{ n variantes à 10 résultats exacts.} \\ si \frac{m}{n}, \frac{3}{n}, \frac{n}{n} \geq 2. \\ 4 \cdot c \frac{2}{n} + 2 \cdot (m-1) \cdot n \text{ variantes à 10 résultats exacts.} \\ si \frac{m}{n} \leq 3, \frac{n}{n} \geq 2. \\ c \frac{2}{m} - 1 + 2 \cdot (m-1) \cdot n \text{ variantes à 10 résultats exacts,} \\ si \frac{m}{n} \geq 3, \frac{n}{n} \leq 2. \end{cases}$   $2 \cdot (m-1) \cdot n \text{ variantes à 10 résultats exacts}$   $si \frac{m}{n} \leq 3, \frac{n}{n} \leq 2. \end{cases}$ 

1.6. A une tournée d'échecs ont participé 10 joueurs : A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, ... A 10 - chaque joueur d'échecs a joué avec chacun des autres partenaires un match. Pour chaque victoire il a gagné un point, pour chaque partie nulle un demi-point, et pour chaque défaite zéro point.

A la fin de la tournée, le classement était :

1.	ΓA	9,5 points	~ 6. A	4 points
	$\overline{\mathbb{A}_2}$	9 points	7-9. A	2 points
3.	. —	6 points	7-9. A	2 points
4-5.		5 points	7-9. A	2 points
4-5.	<b>4</b> 5	5 points	10. A	lo 1 point

Montrer que dans ce classement il existe au moins trois fautes !

#### SOLUTION:

In première faute:  $A_1$  ne peut accumuler qu'au maximum 9 points, parce qu'il joue seulement 9 matchs, donc pas 9,5 points. In deuxière faute:  $A_2$ , situé à la deuxième place dans le classement, ne peut accumuler qu'au maximum 8 points, pas 9 points, parce qu'il peut gagner au maximum 8 matchs (le neuvième match, disputé contre  $A_1$  sera perdu; contre  $A_1$ , le joueur  $A_2$  ne peut pas faire match nul puisqu'il en résulterait que  $A_2$  occuperait la place 1-2, pas 2).

La troisième faute : dans cette tournée se sont joués 9 + 8 + 7...+ l = 45 matchs, donc le nombre total des points du classement doit être 45, que:

$$9,5+9+6+2.5+4+3.2+1=45,5 +45.$$

- 1.7. Soit une grille de mots-croisés (de n lignes, m colonnes et p cases noires), telle qu'il n'existe pas deux cases noirs qui aient un côté commun.
- a) Déterminer le nombre total des mots (horizontaux et verticaux) 3n appelle "mot" même ceux qui contiennent seulement une lettre-.
- b) Trouver la différence entre le nombre des mots horizontaux et celui des mots verticaux.

#### SOLUTION:

a) Montrons que  $N = n + m + CNB + 2 \cdot CNC$ , où

N = le nombre total des mots de la grille

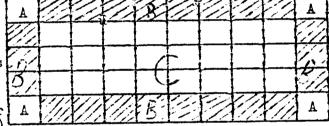
CNB = le nombre des cases noires de la zone B

CNC = le nombre des cases noires de la zone C.

Considerons la grille partagée en 3 zones :

le les quatre sommets de la grille (la zone A);

2º la bordure de la grille moins les quatre sommets (la zone B);



3° la partie de l'intérieur de la grille (la zone C).

On suppose au début la grille sans aucune case-noire.

Alors, elle a n + m mots.

- Si nous posons une case noire dans la zone A, le nombre total des mots reste le même. (Donc le nombre des cases noires de la zone A ne présente pas d'importance).
- Si nous posons une case noire dans la zone B, par exemple sur la ligne l et la colonne J, l < J < m, le nombre des mots croît d'une unité ! puisque dans la ligne l se sont formés maintenant deux mots (avant il y avait un seul mot), et dans la colonne j il reste aussi un seul mot ! La situation est analogue si on pose une case noire sur la colonne l et la ligne i , l < i < n, (on peut renverser la grille : l'horizontal passe en vertical et réciproquement). Donc, pour chaque case noire de la zone B on ajoute un mot au nombre total des mots de la grille.
  - Si on pose une case noire dans la zone C, par exemple sur la ligne i, l < i < n, et la colonne j, l < j < m, alors le nombre des mots croît de deux unités : tant dans la ligne i que dans la

colonne j se trouvent maintenant deux mots, à l'encontre de la situation antérieure où l'on a seulement un mot dans chacune. Donc, pour chaque case noire de la zone C on ajoute deux mots au nombre total des mots de la grille.

- b) Partageons la zone B en deux parties :
  - la zone BO = la partie horizontale de B (les lignes 1 et n)
  - la zone BV = la partie verticale de B (les colonnes 1 et m).

Alors: NO - NV = n - m + CNBO - CNBV, où

NO = le nombre des mots horizontaux

NV = le nombre des mots verticaux

CNBO - le nombre des cases noires de BO

CNBV = le nombre des cases noires de BV.

La démonstration de cette proposition suit le fil de la précédonte, et utilise les résultats suivants :

- S'il n'y a aucune case noire dans la grille, la différence NO NV est égale à n m.
- Si on a une case noire dans la zone A, la différence reste la même.
- De même pour la zone C.
- Si on a une case noire dans la zone BO, alors la différence sera n-m+1, et si la case noire se trouve dans la zone BV, alors la différence sera n-m-1.

De là résulte b).

//-) RITHMETIQUE

------

Déterminer le dernier chiffre des nombres de la suite de Fermat :  $F_n = 2^{2^n} + 1$ , avec n  $\epsilon$  ///.

#### SOLUTION:

Pour n = 0 on a  $F_0$  = 3, et pour n = 1 on trouve  $F_1$  = 5. Pour n  $\geqslant$  2 il en résulte que  $F_n$  =  $2^{2^n}$  + 1 =  $2^{4 \cdot 2^{n-2}}$  + 1 =  $16^{K}$  + 1 qui contient, comme dernier chiffre, 6 + 1 = 7, parce que la puissance de 16 se termine par 6.

#### 2.9. Soit p le produit des n premiers nombres premiers.

Déterminer l'ensemble 
$$F = \{ \alpha \in \mathbb{N} \mid \alpha ! = \mathcal{M}_{F} \}$$
.

(M. p. signifie multiple de p.)

#### SOLUTION:

Pour que  $\alpha' = \beta' p_i$ ,  $1 \le i \le n$ , il faut que  $\alpha' \ge P_i$ .

Donc  $\alpha' \ge \max_{i} \{P_i\} = F_i$ .  $P_n! = 1 \cdot P_i \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_{n-1} \cdot P_n$ ,  $A = 1 \cdot P_n \cdot P_n \cdot P_n$ .

P est le plus petit nombre qui ait cette propriété, puisque s'il existe un  $\alpha' \le P_n$  alors  $\alpha' \ne \beta' P_n \cdot P_n \cdot P_n$ .

Si  $\beta > P_n$  alors, bien sûr,  $\beta := \beta' P_n \cdot P_$ 

Ç

2.10. Déterminer le plus petit nombre naturel tel que sa factorielle soit multiple de chacun des entiers 1970, 1980, 1990 et 2000.

Le plus grand nombre premier qui divise l'un des entiers de

#### SOLUTION:

l'énoncé c'est 199.

Soit & EMM/ le nombre cherché. Alors &! = M. 1990,

d'où & = M. 199. Donc & Donc & 199. On prend & = 199.

199! = M. 10 parce que 10 < 199. On a aussi 199! = M. 1970.

Puisque (10,197) = 1, il en résulte que 199! = M. 1970.

199! = M. 1990.

199! = M. 36 et 199! = M. 55, mais (36,55) = 1;

d'où 199! =  $\mathcal{M}_{36.55} = \mathcal{M}_{1980}$ . 199! =  $\mathcal{M}_{16} = \mathcal{M}_{16.55} = \mathcal{M}_{125} = (16,125) = 1$ ;

199! =  $\mathcal{N}(16 \text{ et } 199! = \mathcal{N}(125 \text{ et } (16,125) = 1;$ donc 199! =  $\mathcal{N}(2000)$ .

On suppose par l'absurde que < n'est pas le plus petit. Alors, il existe < ' < 199, tel que < '! = < 199; contradiction.

- 2.14.0n donne les naturels A et B. On considère  $M_1 = A + B$ ,
  - $M_2 = A B$ ,  $M_3 = A \cdot B$  on note  $M_m$  le nombre formé seulement par les m derniers chiffres de X.
  - a) Montrer que pour connaître les m derniers chiffres de  $M_1$  il suffit de connaître les m derniers chiffres de la somme  $A_m$  +  $B_m$ . Même question pour  $M_2$  for  $M_3$ .
  - b) Généraliser.
  - c) Que peut-on dire des m derniers chiffres de  $A^B$  ?

#### SOLUTION:

a) On peut écrire 
$$A = \mathcal{M}_{10}^{m} + A_{m}$$
 et de même :  $B = \mathcal{M}_{10}^{m} + B_{m}$ .

Alors  $M_{1} = A + B = \mathcal{M}_{10}^{m} + (A_{m} + B_{m})$ .

Aussi  $M_{2} = A - B = \mathcal{M}_{10}^{m} + (A_{m} - B_{m})$  et

 $M_{3} = A \cdot B = \mathcal{M}_{10}^{m} + (A_{m} \cdot B_{m})$ .

b) Généralisation :

Si E ( $A_1$ ,...,  $A_n$ ) est une expression arithmétique où se rencontrent seulement les opérations +, -, . et si  $A_1$ ,...,  $A_n$  sont naturels, alors

$$E_{m}(A_{1},...,A_{n}) = E(A_{1,m},...,A_{n,m}),$$

- où  $A_{i,m}$  représente les m derniers chiffres de  $A_i$ .

  La démonstration résulte de a).
- c) A<sup>B</sup> est une multiplication répétée. Donc

$$(A^B)_m = A_m^B$$
.

2.12 En sachant qu'il est h heures et m minutes,  $1 \le h \le 12$ ,  $0 \le m \le 60$ , trouver après combien de temps les aiguilles de la montre vont former un angle  $\le$ , avec  $0 \le \le 360^\circ$ .

#### SCLUTION:

Tout d'abord on détermine les vitesses angulaires pour chaque aiguille de la montre.

Ia grande aiguille parcourt 360° en une heure; d'où  $V_{C} = 6^{\circ}/\text{min}$ .

La petite aiguille parcourt 360° en 12 heures ; d'où  $V_p = 0.5° / min$ .

On calcule l'angle existant déjà entre les aiguilles de la montre à h heures et m minutes.

La grande aiguille a parcouru 6m degrés.

La petite aiguille a parcouru  $(60 \text{ h} + \text{m}) \cdot 0.5 = 30 \text{ h} + 0.5 \text{ m}$  degrés.

Notons x (en minutes) l'inconnue du problème.

L'angle formé par les aiguilles c'est | 6m - 30h - 0,5 m | = | 5, m - 30 h | . (On considère des angles positifs, parceque dans le problème on ne spécifie pas le sens des angles)

- A) Cas où | 5,5m 30h | < ...
  - a) 5,5m 30h > 0 (=> la grande aiguille a parcouru une distance (en degrés) supérieure ou égale à la distance parcourue par la petite aiguille.

On a 
$$6x - 0, 5x = 4 - (5, 5m - 30h) \implies x = 4 + 30h - 5, 5m - 5, 5$$

b) 5,5 m - 30 h < 0. C'est la situation contraire.

On a 
$$6 \times -0.5 \times = 4 - (5.5 \text{ m} - 30 \text{ h}) \Rightarrow x = \frac{4 + 30 \text{ h} - 5.5 \text{ m}}{5.5}$$

- B) Cas où  $|5,5 \text{ m} 30 \text{ h}| > \infty$ .
  - a)  $5,5 \text{ m} 30 \text{ h} \geqslant 0$ . On a  $6x - 0,5x = 4 + 360 - (5,5m - 30h) \implies x = \frac{4 + 360 + 30h - 5,5m}{5,5}$
  - b) 5.5 m 30 h < 0.On a 6x - 0.5x = 5.5m - 30 h - 6x = 30 h - 5.5m - 6

2.13. Soient  $a_1$ , ...,  $a_{2n+1}$  des entiers, et  $b_1$ , ...,  $b_{2n+1}$  les mêmes nombres dans un autre ordre. Montrer que l'expression  $E = (a_1 \pm b_1) \dots (a_{2n+1} \pm b_{2n+1})$  est un nombre pair, où les signes + et - sont arbitraires pour chaque parenthèse. (Généralisation du problème A.7, page 105, de D. Gerll et G. Girard, "Les olympiades internationales de mathématique", Hachette 1976.)

#### SOLUTION:

On suppose que l'expression E est impaire. Il en résulte que chaque parenthèse est impaire, d'où chaque parenthèse contient un nombre pair et l'autre impair.

On a donc 2n + 1 nombres pairs. Mais, si dans une parenthèse se trouve un  $a_i$ , pair, alors il existe une autre parenthèse où se trouve un  $b_j$  =  $a_i$ , donc  $b_j$  est pair.

Ainsi le nombre des pairs est un nombre pair, qui bien sûr est différent de 2n + 1. Contradiction.

2.14. Résoudre l'équation :  $X - \phi(X) = 24$ , en sachant que  $\phi(X)$  représente le nombre des nombres positifs, inférieurs à X et premiers à X.

#### SOLUTION:

 $\emptyset$  (X) =  $P_1^{-1} \dots P_s^{-1} \cdot (P_1 - 1) \dots (P_s - 1), \emptyset$  étant la

fonction d'Euler de la théorie des nombres.

 $X - \phi(X) = P_1$  ...  $P_s$  ...  $P_s - (P_1 - 1) ... (P_s - 1) = 24 = 2<sup>3</sup>.3<sup>1</sup>;$ 

Donc, évidemment, X a la forme :  $X = 2^{1} \cdot 3^{2}$ ,

On obtient  $X - \emptyset(X) = P_1 - P_2 - P_2 - P_1 - P_2 - P_1 - P_2 - P_1 - P_2 - P_2 - P_1 - P_2 - P_2 - P_1 - P_2 - P_2 - P_2 - P_1 - P_2 -$ 

 $(P_2-1)$ , c'est-à-dire  $X - \emptyset$  (X) = 2 x - 1 x - 2 x - 2 x - 2 x - 2 x - 2 x - 3 x - 2 x - 3 x - 3

ou 2 -1 . 3  $\sim 2^{-1} = 2^{1} \cdot 3^{1}$ , d'où  $\sim 1 = \sim 2^{2} = 2$  et en conclu-

sion  $X = 2^2 \cdot 3^2 = 36$ .

2.15. Soit p (n) la fonction d'Euler. Montrer que :

 $\phi$  (n) est nombre premier si et seulement si n  $\epsilon$  { 0,  $\pm$  3,  $\pm$  4,  $\pm$  6 }.

#### SOLUTION:

Suffisance.

$$\phi$$
 (0) =  $\phi$  ( $\pm$  3) =  $\phi$  ( $\pm$  4) =  $\phi$   $\pm$  6) = 2 qui est nombre premier.

Nécessité.

 $\phi$  (± 1) =  $\phi$  (± 2) = 1 qui n'est pas un nombre premier. Donc

$$n \neq \{\pm 1, \pm 2\}.$$

Soit  $n = + p_1$  ...  $p_s$  avec  $p_1, \ldots, p_s$  nombres premiers

différents.

Comme  $\phi$  (n) est un nombre premier il en résulte que  $\phi$  (n) =2.

Donc  $p_i - 1 = 1$  ou  $p_i - 1 = 2$ . Il suit que  $p_i = 2$  ou 3.

$$p_i = 2 \implies x_i = 2$$
. Dono  $n = 4, 3, 6$ . Ainsi  $n \in \{\pm 3, \pm 4, \pm 6\}$ .

Mai  $\emptyset$  (0) = 2 qui est premier, donc  $n \in \{0, \pm 3, \pm 4, \pm 6\}$ . 2.16 Soit un nombre entier m tel que  $\emptyset$  (m) =  $\mathcal{M}_4$ , où  $\emptyset$  représente l'indicateur d'huler. Montrer qu'il existe un nombre pair de racines primitives modulo m. (Un entier a s'appelle racine primitive modulo m, si a  $\phi$  (m) = 1 (mod m) et a  $\phi$  (m) pour 1  $\phi$  (m).)

#### SOLUTION:

- 1) S'il n'existe pas de racine primitive modulo m, alors on a 0 racine et 0 est pair.
- 2) Sill existe des racines primitives, soit r l'une de celles-ci.

  On a (r,m) = 1,  $r \not p \pmod{m} \equiv 1 \pmod{m}$  et  $r \not k \not \equiv 1 \pmod{m}$  pour  $1 \leqslant K \leqslant \not p \pmod{m}$ . Montrons que m-r aussi est une racine primitive modulo m.
- A) Tout d'abord  $m r \neq r \pmod{m}$ , puisque dans le cas contraire il en résulterait  $2 r \equiv 0 \pmod{m}$ , ou  $2 r = t \cdot m$ , avec  $t \in \mathbb{Z}$ .

  Comme  $\phi(m) = \sqrt{2}4$ , on a  $m \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ .
- $\alpha$  ) m = 2 h,  $h \in \mathbb{Z} \{0, \pm 1\}$  . On a:  $m \mid 2r \implies 2h \mid 2r \implies h \mid r \implies (r,m) = h \neq \pm 1$ , absurde.
- $\beta$ ) m = 2n + 1,  $h \in \mathbb{Z} \{-1,0\}$ . On a:  $m \mid 2r \Rightarrow h \mid r \Rightarrow (r,m) = m \neq +1$ , absurde. D'où  $r - r \not= r \pmod{m}$ .
- B)  $(m, m-r) = \tilde{a} \implies \tilde{d} \mid m \text{ et } d \mid m-r \implies \tilde{d} \mid r \implies \tilde{d} = (r, m) = 1;$ done  $(m-r, \tilde{m}) = 1.$

 $(m-r)^{\beta}$  (m) = 1 (mod m), conformément au théorème d'Euler. On suppose par l'absurde qu'il existe  $\mu \in \mathbb{N}/*$ ,  $\mu' \in \mathbb{N}$  (m) avec  $(m-r)^{\beta}$  = 1 (mod m). Il en résulte  $l = (m-r)^{\beta} = (-r)^{\beta} = (-r)^$ 

2.17. Soit m un nombre naturel  $\geqslant$  3, et  $a_1, \dots a_p$  tous les nombres positifs inférieurs à m et étrangers à m.

Alors  $a_1 + a_2 + \dots + a_p = \mathcal{M}_m$ .

#### SOLUTION:

Montrons que  $p = \sqrt[4]{2}$ .

On voit que, si o  $\langle a \rangle m$  et (a,m) = 1, alors on a aussi o  $\langle m-a \rangle m$  et (m-a,m) = 1, parce que:

o  $\langle a \rangle m \Rightarrow -m \langle a-m \rangle m \Rightarrow o \langle m-a \rangle m$ ;

soit d = (a-m, m) en résulte  $d \mid m-a \rangle m = 0$  et  $d \mid m$ ,  $d \mid o \mid u \rangle d \mid a \rangle m$ , donc  $d \mid d \mid u \rangle m = 1$ , et ainsi  $d \mid d \mid u \rangle m$ , donc  $d \mid u \rangle m = 1$ , et ainsi  $d \mid d \mid u \rangle m$ .

On  $a : \forall a \in \{a_1, \dots, a_p\}$ ,  $\exists m-a \in \{a_1, \dots, a_p\}$  tel que  $m-a \neq a$ ;

(dans le cas contraire, il en résulterait que  $m = 2a \rangle m =$ 

2.16. Soient a, b, c, trois nombres entiers, tels que  $a^2 + c^2 \neq 0$  et

$$b^2 + c^2 \neq 0$$
.

Démontrez que  $(a,b,c) \cdot C$ 
 $(a,c) \cdot (b,c)$ 

(La notation  $(x_1, ..., x_n)$  représente le plus grand commun diviseur des nombres  $x_1, ..., x_n$ .)

#### SOLUTION:

Soit d = (a, b, c). Cela implique que  $a = a^{\dagger}d$ ,  $b = b^{\dagger}d$ ,  $c = c^{\dagger}d$  et  $(3^{\dagger}, b^{\dagger}, c^{\dagger}) = 1$ . Alors :

 $(a, c) = (a^{2}d, c^{4}d) = d \cdot (a^{4}, c^{4}) = d \cdot d_{13}$  (on a noté  $(a^{4}, c^{4}) = d_{13}$ );  $d \cdot ou$   $c^{4} = d_{13} \cdot a^{4} \cdot a^{4}$  avec  $a^{4} \in \mathbb{Z}$ .

(b, c) :  $(b^{\dagger}d, c^{\dagger}d) = d \cdot (b^{\dagger}, c^{\dagger}) = d \cdot d_{23}$  (on a noté  $(b^{\dagger}, c^{\dagger}) = d_{23}$ );  $d^{\dagger}où c^{\dagger} = d_{23} \cdot e$ , avec  $\beta \in \mathbb{Z}$ .

 $\text{Mais}(d_{13}, d_{23}) = ((a^i, c^i), (b^i c^i)) = (a^i, b^i, c^i) = 1.$ 

Puisque  $d_{13}$   $\ll$   $d_{23}$   $\beta$  ,  $(d_{13}, d_{23}) = 1$ , et que tous les nombres sont entiers, il en résulte que  $d_{23}$  divise  $\ll$  ,

c'est-à-dire  $\angle = d_{23} \angle$ ', avec  $\angle = 2.0$  Donc  $c = d.d_{13}.d_{23}. \angle$ ';

Ainsi que 
$$\frac{(a,b,c) \cdot c}{(a,c) \cdot (b,c)} = \frac{d \cdot d \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot \alpha'}{d \cdot d_{13} \cdot d \cdot d_{23}} = \alpha' \in \mathbb{Z}$$
.

Les conditions de l'énoncé du problème assurent l'existence de l'expression, c'ést-à-dire, le dénominateur est différent de zéro.

2.19. Soient 
$$a_i$$
,  $b_i \in \mathbb{N}/$ ,  $i = \overline{1,n}$ . Montrer que:
$$(a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n) \geqslant \overline{1,n} \quad (a_i, b_i),$$

où (  $\ll$  ,  $\approx$  ) représente le plus grand commun diviseur des nombres  $\ll$  et  $\beta$  .

#### SOLUTION:

On applique le raisonnement par récurrence.

Pour i = 1 c'est évident. Pour i = 2, il faut montrer

que 
$$(a_1 a_2, b_1 b_2) > (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)$$
;

Soient 
$$a_1 = a_{11} d_{a_1b_1}$$
,  $b_1 = b_{11} d_{a_1b_1}$  avec  $(a_{11}, b_{11}) = 1$ 

et soient 
$$a_2 = a_{21}d_{a_2b_2}$$
,  $b_2 = b_{21}d_{a_2b_2}$  avec  $(a_{21},b_{21}) = 1$ .

Alors 
$$(a_1a_2, b_1b_2) = d_{a_1b_1} \cdot d_{a_2b_2} \cdot (a_{11} a_{221}, b_{11} b_{21}) >$$

$$\geqslant d_{a_1b_1} \cdot d_{a_2b_2} = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2).$$

On suppose l'inégalité vraie pour les valeurs de i qui sont inférieures à n. Il en résulte :

$$(a_1 \cdots a_n a_{n+1}, b_1 \cdots b_n b_{n+1}) \ge (a_1 \cdots a_n, b_1 \cdots b_n) \cdot (a_{n+1}, b_{n+1})$$

$$\geqslant (\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)) \cdot (a_{n+1}, b_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} (a_i, b_i)$$

2.20. Si  $(a_1, b_1) \in \mathbb{Z}/2$ , i  $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \in \mathbb{Z}/2$ , représente le plus petit commun multiple des nombres a et  $a_n$ , alors :

$$\begin{bmatrix} a_1 \cdots a_n, b_1 \cdots b_n \end{bmatrix} \left\langle \prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} a_i, b_i \end{bmatrix} \right\rangle$$

#### SOLUTION:

On va démontrer par r sonnement par récurrence.

Le cas i = l est évident. Pour i = 2, il faut montrer que

$$[a_1a_2, b_1b_2] \leqslant [a_1,b_1] \cdot [a_2,b_2]$$
;

Ecrivons  $a_1 = a_{11} d_{a_1 b_1}, b_1 = b_{11} d_{a_1 b_1}$  avec  $(a_{11}, b_{11}) = 1$ ,

et 
$$a_2 = a_{21} a_2 b_2$$
,  $b_2 = b_{21} a_2 b_2$  avec  $(a_{21}, b_{21}) = 1$ .

$$\leq d_{a_1b_1} d_{a_2b_2} d_{a_1b_2} d_{a_2b_2} d_{a_1b_1} d_{a_2b_2} d_{a_2b$$

Supposons la propriété vraie pour i 🔇 n , elle est vraie aussi

pour i = n + 1, parce que :

· Donc le problème est démontré.

2.21. Soit m un nombre naturel, 
$$1 \leqslant n \leqslant 5$$
.

Nontrer que si 
$$9^m = \overline{a_1 \cdots a_m}$$
, alors  $9 \cdots 9^m = \overline{n \cdot pois}$ 

$$= \underbrace{9...9a_1 \underbrace{0...0}_{n-1} a_2 \underbrace{9...9}_{n-1} ...a_n} \text{ avec n } \epsilon / (/*.$$

#### SOLUTION:

Cas où m = 1. 
$$9^1 = 9$$
,  $9 \cdot ... \cdot 9^1 = 9 \cdot ... \cdot 9 \cdot ... \cdot 9$ 

Cas où m = 2. 
$$9^2 = 81$$
,  $9 \cdot \cdot \cdot \cdot 9^2 = (100 \cdot \cdot \cdot 0 - 1)^2 = \frac{1}{2}$ 

$$= 1 \underbrace{0...0}_{2n} - 20...0 + 1 = 10...0 \underbrace{0...01}_{n} - 20...0 = \underbrace{9...9}_{n-1} \underbrace{80...01}_{n-1};$$

Cas où m = 3. 
$$9^3 = 729$$
,  $9...9^3 = (10...0 - 1)^3 =$ 

$$= 10...0 - 30...0 + 30...0 - 1 = 10...0 0...03 0...0 -$$

$$3n 2n n n n n n$$

$$-30...0 \underbrace{0...01}_{n} = \underbrace{9...9}_{n-1} 70...0 2 \underbrace{9...9}_{n-1} 9.$$

Cas où m = 4. 
$$9^4 = 6561$$
,  $9 \cdot ... 9^4 = (10 \cdot ... 0 - 1)^4 =$ 

$$= 10...0 - 40...0 + 60...0 - 40...0 + 1 = 10...0 0...06 0...0 0...01$$
4n 3n 2n n n n n n

$$-40...0$$
.  $0...04$ ,  $0...0$ ,  $=9...9$   $60...0$ ,  $59...9$   $60...0$  1.

Cas où m = 5. 
$$9^5 = 59049$$
,  $9 \cdot \cdot \cdot \cdot 9^5 = (1 \cdot 0 \cdot \cdot \cdot 0 - 1)^5 = 10 \cdot \cdot \cdot 0 - 5n$ 

$$-50..0 + 100..0 - 100..0 + 50..0 - 1 =$$
4n 3n 2n n

$$= \underbrace{9...9}_{n-1} \quad 5 \quad \underbrace{0...0}_{n-1} \quad 9 \quad \underbrace{9...9}_{n-1} \quad 0 \quad \underbrace{0...0}_{n-1} \quad 4 \quad \underbrace{9...9}_{n-1} \quad 9.$$

Observation. Pour m 26 la formule n'est plus vrais.

2.22.0n considère l'ensemble  $A = \left\{ \underbrace{9...9}_{n} \cdot m \mid m \in \text{ et } \right\}$  et

n  $\epsilon / / /*$ , invariable.

- a) Calculer le plus grand nombre de 2 n chiffres de l'ensemble A, tel qu'il ne contient pas le chiffre 9.
- b) Calculer le plus petit nombre de 2 n + K chiffres qui ne contient pas le chiffre 9. Discussion.

#### SOLUTION:

a) On cherche le plus grand m  $\epsilon / / / *$ , m =  $b_1 \cdot \cdot \cdot b_n$ , qui multiplé par  $9 \cdot \cdot \cdot 9$  donne un produit de 2 n chiffres avec tous ses chiffres n

différents de 9.

9...9 · m = 
$$(1,0...0,-1)$$
 · m =  $m,0...0,-m$ .

On fait la différence : 
$$b_1 \cdots b_n \underbrace{0 \cdots 0}_{n} - \underbrace{\frac{n}{b_1 \cdots b_n}}_{n}$$

 $\frac{b_1\cdots b_n}{=?}$  S'il existe  $b_j=9,\ j\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ , alors : s'il existe au moins un chiffre non nul derrière le  $b_j$ , par la soustraction il résulterait  $b_j=9$  dans le résultat, si tous les  $b_h=0,\ h\in\{j+1,\ldots,n\}$  par la soustraction dans le résultat il existerait au moins un chiffre de 9 à l'une des places  $j+1,\ldots,n$ .

Le cas suivant c'est m = 8...89. On effectue la différence (c'est-à-

dire la multiplication 9...9 • 8...8 9 )

et on obtient le plus grand nombre de 2 n chiffres de l'ensemble A qui ne contient pas le chiffre 9, c'est 8...8, 1...1.

b) Le nombre m aura n + K chiffres.

1°) Le cas 1 ( K ( n. Démontrons que m = 1 0...0, 1...1 2 est

K-1 n-1

le plus petit nombre de n + K chiffres qui sura la propriété demandée.

On ne peut avoir aucun zéro parmi les n derniers chiffres du nombre m parce qu'il en résulterait, par multiplication, au moins un chiffre 9 dans le produit; le dernier chiffre non nul de m est différent de 1 (de même motif); les autres chiffres de m peuvent être égaux à zéro, seulement le premier aura la valeur minimum l puisque K  $\langle n \rangle \Rightarrow K-1 \langle n-1 \rangle$ 

$$\begin{array}{c}
9...9 \\
n
\end{array}$$
1.0...0 1...12

$$= 1.0...0, 1...1, 0.1...1, 8...8$$

$$K-1 \quad n-K \quad K-1 \quad n$$

(On a encore utilisé la propriété que le plus petit nombre de 2n chiffres de A, qui ne contient pas de chiffres de 9 est 1...1, 8...8, et que le m correspondant est 1...1, 2.)

2°) Le cas K > n + 1. Maintenant, on ne peut pas écrire  $m = 1 \underbrace{0...0}_{k-1} \underbrace{1...1}_{k-1} 2$  parce que K-1 > n-1 et le résultat de

la multiplication contiendra des chiffres 9 :

$$\frac{9 \cdot \cdot \cdot 9}{n}$$

$$= \underbrace{9 \cdot \cdot \cdot 9}_{n} \underbrace{0 \cdot \cdot \cdot 0}_{K-i_1} \underbrace{1 \cdot \cdot \cdot 1}_{n} \underbrace{8 \cdot \cdot \cdot 8}_{n}$$

Cherchons le plus petit m & ///\*, de n + K cl\_ffres, qui aura la propriété demaniée. Les n derniers chiffres de m seront aussi l...l 2. Le premier aussi l.

Parmi les chiffres inconnus on ne peut pas avoir plus de n - l zéros consécutifs à cause de (1). Pour que n soit aussi petit que possible posons n - l zéros consécutifs après le premier chiffre, puis un chiffre l (le minimum non nul), encore n-l zéros consécutifs et encore un chiffre l etc.

Donc 
$$m = 1, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, 1, ..., 0, ..., 0, 1, ..., 1, 2.$$

K chiffres

D'où, le nombre cherché est  $\underbrace{9...9}_{n}$ ,  $m = 1 \underbrace{0...0, 1...1}_{p-1}, 0 \underbrace{1...1, 8...8}_{p}$ 

avec  $p=K-n\cdot \left[\frac{K}{n}\right]-1$ , où  $\left[X\right]$  représente la partie entière de X. Voici la multiplication :

$$\begin{array}{c}
\underbrace{9...9}_{n} \\
1 \underbrace{0...0}_{n-1} 1 \underbrace{0...0}_{n-1} \dots 1 \underbrace{0...0}_{p-1} 1 \underbrace{0...0}_{n-1} 2 \\
K$$

### 2.23.Si x, y $\in /\!\!/(/$ , alors il existe Z $\in /\!\!/(/$ tel que

$$10X \cdot 10y = 1Z$$

Généraliser ce résultat au cas où le nombre de zéros entre l et x, et entre 1 et Y, est quelconque.

SOLUTION:

Solution:  
Soient 
$$X = \overline{a_1 \cdots a_n}$$
,  $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}/*$ ,  
et  $y = \overline{b_1 \cdots b_m}$ ,  $0 \leqslant b_j \leqslant 9$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $m \in \mathbb{N}/*$ .

On effectue la multiplication

$$\frac{10 \, a_1 \cdots a_n}{10 b_1 \cdots b_m} \, \mathbf{x}$$

Ia multiplication par b<sub>m</sub> n + 2 chiffres la multiplication par b. n+2 chiffres la multiplication par 1 n+2 chiffres 1 0

On a désigné par ". " un chiffre naturel compris entre 0 et 9. Donc, le premier chiffre du produit c'est Plus généralement : si x, y  $\epsilon$  /// , alors il existe Z  $\epsilon$  ///

tel que 
$$10..0x$$
  $10..0y = 10..0Z$ ,  
s chiffres t chiffres u chiffres

où on a  $u = \inf(s, t) - 1$ . La démonstration de celui-ci copie la démonstration antérieure. 2.24.On constière une base b de numération, et p un diviseur simple de celle-ci tel que  $(p, \frac{b}{p}) = 1$ . Alors :

 $\forall n \in \mathbb{N}/*$ ,  $\exists A_n = \overline{a_1, ..., a_n}$  écrit en base b qui est divisible par  $p^n$ , avec  $a_i \in \{1, 2, ..., |p|\}$ , 1 < i < n.

#### SOLUTION:

On applique le raisonnement par récurrence pour  $n \in \mathbb{N}/$ .

Pour n = 1 on a :  $\exists A_1 = |p|$  qui est divisible par  $p^1$ .

(On observe que, puisque p b, il résulte b = Kp,  $K \in \mathbb{Z}$ ;

 $1 = (p, \frac{b}{p}) = (p, K) ; \text{ aussi, tous les chiffres des nombres de la}$  base b appartiemnent à l'ensemble  $M_b = \{0, 1, 2, \ldots, |p|, |p| + 1, \ldots, b-1\},$  et ils sont représentés par un seul symbole (par exemple, si b) 10, alors les chiffres 10, 11, ... sont notés par A, B, ...). Donc  $|p| \in M_p = \{1, 2, \ldots, |p|\}$  cet il est formé par un chiffre en base b;  $(p|b \Rightarrow |p|) = \{b\} = b\}$ ; On suppose la propriété vraie pour n, c'est - à - dire  $= A_n = \overline{a_1 \ldots a_n}$ ,

écrit en base b, qui est divisible par  $p^n$ , où  $a_i \in M_p$ , 1 < i < n.

Montron, qu'elle est vraig pour n + 1. Soit  $A_{n+1} = \overline{x} \cdot a_1 \cdot \cdot \cdot a_n$ , avec  $x \in M_p$ ,

écrit en base b. On détermine un tel x pour que  $\underset{n+1}{\mathtt{A}}$  se divise par  $p^{n+1}$ 

(il suffit de montmer qu'il existe un tel x).

 $A_{n+1} = x \cdot b^n + \overline{a_1 \cdot a_n} = x \cdot K^n \cdot p^n + A_n = p^n (K^n \cdot x + t), \text{ où } A_n = tp^n, t \in \mathbb{Z}$ (de l'hypothèse de récurrence).

 $\exists x \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbb{K}^n \times + t \equiv 0 \pmod{p} \iff \mathbb{K}^n \times \equiv -t \pmod{p}$ . Puisque  $(p, \frac{b}{p}) = 1 = (p, \mathbb{K})$  on a :  $(p, \mathbb{K}^n) = 1$ . D'où l'inverse de l'élément  $\mathbb{K}^n$  par rapport au module p existe. La congruence antérieure devient :  $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times$ 

(Il existe  $x \in \mathbb{N}_p$ , parceque  $M_p$  constitue un système complet de restes modulo  $p_*$ )

2.35. Soient n, m  $\in \mathbb{N}(/* \cdot 0n \text{ note a}_n^{(m)} = m^m$  avec n chiffres m, et  $b_n^{(m)} = \underbrace{m \cdot \cdot \cdot m}_{n}$ . Pour chaque n et m comparer  $a^{(m)}$  à  $b_n^{(m)}$ . Discussion. (Tous les nombres sont écrits en base 10.)

## SOLUTION:

Dans les conditions précédents, on a

Lemme 1. 
$$\forall n \in ///*, \quad \forall m > 2 \quad m^{4n} > \overline{m_{\bullet \bullet m}}$$
.

Démonstration : par récurrence sur n  $\epsilon$  ///\*

Le cas n = 1 implique  $n^4 > m$  qui est vrai. On suppose la propriété vraie pour n, et on la démontre pour n + 1:

$$m^{4(n+1)} = m^{4n}, m^{4} > \underbrace{\overline{m}, \overline{m}}_{n} \cdot m^{4} > \underbrace{\overline{m}, \overline{m}}_{n} \cdot 16 = \underbrace{\overline{m}, \overline{m}}_{n+1} \cdot 6$$

$$\sum_{m,\cdot,m} + m = m,\cdot,mm$$
.

Lemme 2. 
$$\forall n \geq 3$$
,  $\forall m \in //(/*, b_n^{(m)}) > 4(n+1). \underbrace{\overline{m...m}}_{n+1}$ .

Démonstration, 
$$\frac{m_{...m}}{n}^2 = \frac{m_{...m}}{n} \cdot \frac{m_{...m}}{n}$$
 puisque  $n > 3$ .

$$\underbrace{\overline{n}...\overline{n}}_{n}$$
  $n+1$   $\downarrow$  4 parce que  $n \geq 3$ .

$$e_{1}^{(m)} = \underbrace{\underline{\underline{m}_{\cdot \cdot \cdot \cdot m}}_{n}}_{n} > \underbrace{\underline{\underline{m}_{\cdot \cdot \cdot \cdot m}}_{n}}_{n} > 4 (n+1) \cdot \underbrace{\underline{\underline{m}_{\cdot \cdot \cdot \cdot mm}}_{n+1}}_{n+1}.$$

Lemme 3.S'il existe  $n_o \in \mathbb{M}/*$ ,  $n_o \ge 3$ , tel que  $a_{n_o}^{(m)} > b_{n_o}^{(m)}$  alors  $y = y \ge 2$ ,  $y = y \ge n_o$  on a  $a_n^{(m)} > b_n^{(m)}$ .

Démonstration; par récurrence sur  $n > n_o$ .

Le cas  $n = n_c$  est vrai par hypothèse. On suppose la propriété vrais pour n, et on la démontre pour n+1:

= b<sub>n</sub> . Pour la démonstration de ces inégalités on a utilité l'hypothèse de récurrence, le lemme 2, respectivement le lemme 1.

Lemme 4. 
$$\forall m > 6$$
  $a_3^{(m)} > b_3^{(m)}$ .

Démonstration. Puisque m > 6 et grâce aux lemmes 1 et 2, il en résulte que :

$$m^{m} = m^{2} \cdot m^{m} - 2 > 4 \cdot 3 \cdot m^{m-2} > 4 \cdot 3 \cdot 6^{4} > 4 \cdot 3 \cdot \overline{m}$$

$$a_{3}^{(m)} = m^{m} > m^{4 \cdot 3} \cdot \overline{m} = (m^{4 \cdot 3}) \overline{m} > \overline{m} = b_{3}^{(m)} \cdot \overline{m}$$

On a: 
$$a_n^{(m)} = m^{m^{\bullet \bullet \bullet}}$$
 avec n chiffres de m,  $b_n^{(m)} = \underbrace{\overline{m_{\bullet \bullet \bullet m}}}_{n} \underbrace{\overline{m_{\bullet \bullet \bullet m}}}_{n}$ 

Cas 
$$m = 1$$
.  $a_1^{(1)} = 1 = b_1^{(1)}$ .

$$a_n^{(1)} = 1 \langle \underbrace{1...1}_{n} = b_n^{(1)}, \forall n \geq 2.$$

Cas 
$$m = 2$$
.  $a_1^{(2)} = 2 < 2^2 = b_1^{(2)}$ 

$$a_2^{(2)} = 2^2 < 22^{22} = b_2^{(2)}$$

$$a_3^{(2)} = 2^4 < 222^{222} = b_3^{(2)}$$

$$a_4^{(2)} = 2^{16} < 2222^{2222} = b_4^{(2)}$$

$$a_5^{(2)} = 2^{65536} < 2^{3.22222} < 22222^{22222} = b_5^{(2)}$$

D'après le lemme l on obtient :

$$2^{65536} > 2^{5} \cdot 2^{4 \cdot 6} > 4.7.2222222.$$

D'onc 
$$a_6^{(2)} = 2^{2^{65536}} > 2^{4 \cdot 7 \cdot 222222} = (2^{4 \cdot 7})^{222222}$$

$$>$$
 222222 $^{222222} = b_6^{(2)}$ .

Du lemme 3 il résulte que  $a_n^{(2)} > b_n^{(2)}$ ,  $\forall n > 6$ .

Cas m = 3. 
$$a_1^{(3)} = 3 < 3^3 = b_1^{(3)}$$

$$a_2^{(3)} = 3^3 < 33^{33} = b_2^{(3)}$$

$$a_3^{(3)} = 3^{27} < 333^{333} = b_3^{(3)}$$

A partir du lemme 1 on obtient  $3^{27} > 3^3 \cdot 3^{4 \cdot 4} >$ 

Donc 
$$a_4^{(3)} = 3^{27} > 3^{16.3333} = (3^{4.4})^{3333} > 3333^{3333} = b_4^{(3)}$$
  
Du lemme 3 il résulte  $a_n^{(3)} > b_n^{(3)}, \forall n > 4.$ 

Cas 
$$m = 4$$
.  $a_1^{(4)} = 4 < 4^4 = b_1^{(4)}$ .  $a_2^{(4)} = 4^4 < 44^{44} = b_2^{(4)}$ 

$$a_3^{(4)} = 4^{44} = 4^{256} < 444^{444} = b_3^{(4)}$$

Du lemme 1 il résulte  $4^{256}$   $4^2 \cdot 4^{4 \cdot 4}$   $4 \cdot 4 \cdot 4444$ .

Donc  $a_A^{(4)} = 4^{4 \cdot 4} \cdot 4^{4444} = b_A^{(4)} \cdot 4^{4444} = b_A^{(4)}$ 

Du lemme 3 il résulte :

$$\forall n > 4$$
  $a_n^{(4)} > b_n^{(4)}$ .

Cas n = 5. 
$$a_1^{(5)} = 5 < 5^5 = b_1^{(5)}$$
  
 $a_2^{(5)} = 5^5 < 55^{55} = b_2^{(5)}$ 

$$a_3^{(5)} = 5^{5^5} = 5^{3125} = (5^5)^{625} = 3125^{625} > 555^{555} = b_3^{(5)}$$

Du lemme 3 on a :  $\forall n > 3$ ,  $a_n^{(5)} > b_n^{(5)}$ .

Cas 
$$n = 6$$
.  $a_1^{(m)} = m < m^m = b_1^{(m)}$ 

$$a_{2}^{(m)} = m^{m} < \overline{mm}^{\overline{m}} = b_{2}^{(m)}$$
Du lemme 4 il résulte •  $a_{2}^{(m)}$ 

Du lemme 4 il résulte :  $a_3^{(m)} > b_3^{(m)}$ , et du lemme 3

on a : 
$$a_n^{(m)} > b_n^{(m)}, \quad \forall n > 3$$

et le problème est complètement résolu.

<u>/</u>OGIQUE

/(/) ATHEMATIQUE

.

3.26. Soient P et  $Q_i$ ,  $1 \le i \le n$ , des propositions logiques. Montrer que la proposition logique "  $\bigvee_{i=1}^{n} (P \land Q_i) \Rightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} (P \lor Q_i)$ " est toujours vraie.

# SOLUTION:

Une proposition logique "A  $\Longrightarrow$  B" est fausse seulement lorsque A = 1 (vraie) et B = 0 (fausse). Montrons que cette situation n'existe pas.

Si " 
$$\bigvee_{i=1}^{n} (P_{\wedge} Q_{i})^{"} = 1$$
, alors  $\exists i_{\circ} \in \{1, ..., n\}$  tel que  $P_{\wedge} Q_{i} = 1$ , c'est-à-dire  $P = 1$  et  $Q_{i} = 1$ .

D'où :  $P_{\wedge} Q_{i} = 1$   $\forall i \in \{1, ..., n\}$  puisque  $P_{i} = 1$ , donc "  $\bigwedge_{i=1}^{n} (P_{\wedge} Q_{i}) = 1 \neq 0$ .

( $\wedge$  signifie "et",  $\wedge$  signifie "ou".)

3.27. Montrer que si les propositions logiques " $A_1 \Rightarrow A_2$ " et " $B_1 \Rightarrow B_2$ " sont vraies, alors les propositions logiques " $A_1 \wedge B_1 \Rightarrow A_2 \wedge B_2$ " et " $A_1 \vee B_1 \Rightarrow A_2 \vee B_2$ " sont vraies aussi .

#### SOLUTION:

Construisons le tableau de vérité suivant :

[A] [A] [B] [B] [B] [B] [A] [B] [B] [B] [B] [B] [B] [B] [B] [B] [B	   <sup>Δ</sup> 1⇒μ <sub>2</sub> 	$B_1 \Rightarrow B_2$	A <sub>1</sub> ^ B <sub>1</sub>	A <sub>2</sub> ~ B <sub>2</sub>	$\begin{array}{c} A_1 \land B_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow A_2 \land B_2 \end{array}$	A <sub>1</sub> v B <sub>1</sub>	A <sub>2</sub> • B <sub>2</sub>	$ \begin{array}{ccc}  & & & \\  & A_1 & & B_1 \Rightarrow \\  & & & & \\  & & & & \\  & & & & \\  & & & &$
1 0! 0! 0! 0	1	1	0	0		0	0	1 !
! 0! 0! 0! 1		1	0	0	1	0	1	! <u> </u>
0! 0! 1! 0	! 1	0	0	0	1	1	0	0 !
! 0! 1! 0! 0	! 1	1	0	0	1	0	1	1
11 0! 0! 0	! 0	1	0	0	1	1	0	0
0! 0! 1! 1		! 1	0	0	1	1	1	1 1
! 0! 1! 1! C	1	. 0	0	0	1	1	1	! 1 !
! 1! 1! 0! 0	1	1	0	0	1	1	1	! l !
0 1 0 1	! 1	1	0	1	1	0	1	! 1 !
! 1! 0! 1! 0	! 0	. 0	1	0	0	1	0	. 0
! 1! 0! 0! 1	! 0	! 1	0	0	1	1	1	! 1 !
0 1 1 1 1	! 1	! 1	0	1	1	1	1	! 1 !
! 1! 1! 1! 0	! 1	! 0	1	0	0	1	1	! 1 !
! 1! 1! 0! 1		! 1	0	1	1	1	1	! ] !
1 1! 0! 1! 1	•	! 1 !	1	0	0	1	0	. 0
! 1! 1! 1! 1	! 1	! 1	1	1	1	1	1	: ! l !
1 1 2 3 4	5	6	7	8	9	10	11	12

On a noté "l" le vrai et "O" le faux. On voit immédiatement que lorsque "A<sub>1</sub>  $\Longrightarrow$  A<sub>2</sub>" et "B<sub>1</sub>  $\Longrightarrow$  B<sub>2</sub>" sont vraies en même temps, il en résulte que "A<sub>1</sub>  $\wedge$  B<sub>1</sub>  $\Longrightarrow$  A<sub>2</sub>  $\wedge$  B<sub>2</sub>" et vraies en même temps.

RIGONOMETRIE

=====----

------

4.25 Démontrer les formules de transformation suivantes des produits de fonctions trigonométriques en sommes :

1) 
$$\cos z_1 \cos z_2 \cdots \cos z_n = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\cos (\epsilon_1 z_1 + \cdots + \epsilon_n z_n)}{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \mathcal{E}_n}$$

2) a) 
$$\sin \times_1 \sin \times_2 \cdots \sin \times_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} = \frac{(-1)^K \cos(\frac{\pi}{2})^k}{(\xi_1, \dots, \xi_{2p}) \in \mathcal{L}_2}$$

b) 
$$\sin z_{1} \cdot \sin z_{2} \cdot \cdot \cdot \sin z_{2p+1} = \frac{(-1)^{p}}{2^{2p}}$$
  $(-1)^{K} \sin (\xi_{1} \times t_{1})$  où  $\mathcal{E}_{m} = \frac{\binom{m}{2}}{\binom{p}{2}} \left\{ (\xi_{1}, \dots, \xi_{m}) \middle| \xi_{1} = \xi_{1} = \dots = \xi_{1} = -1, \text{ et } \xi_{1} = 1 \text{ pour } j \notin \{i_{1}, \dots, i_{k}\} \right\} - \left\{ (\xi_{1}, \dots, \xi_{m}) \middle| (-\xi_{1}, \dots, -\xi_{m}) \in \mathcal{F}_{m} \right\}.$ 

# SOLUTION:

L'ensemble  $\mathcal{E}_{m}$  contient tous les m - uplets ( $\mathcal{E}_{1}, \dots, \mathcal{E}_{m}$ )
qui ont les composantes  $\mathcal{E}_{i} = \pm 1$  arrangées de toutes
les manières possibles, mais telles que si ( $\mathcal{E}_{1}, \dots, \mathcal{E}_{m}$ )  $\mathcal{E}_{m}$ alors ( $-\mathcal{E}_{1}, \dots, -\mathcal{E}_{m}$ )  $\mathcal{E}_{m}$ . Donc  $\mathcal{E}_{m}$  a en tout :

( $\mathcal{C}_{m}^{\ell} + \mathcal{C}_{m}^{l} + \dots + \mathcal{C}_{m}^{m}$ ) :  $2 = 2^{m-1}$  éléments.

par  $c_m^K$ ,  $0 \le K \le m$ , on a représenté le nombre des m-uplets tels que : K composantes sont égales à - 1, et les autres m-K sont égales à + 1.

On fait la démonstration par récurrence sur n.
 Le cas n = l est évident. On suppose l'égalité vraie pour n,
 on la montre pour n + l :

$$(\cos \times_{1} \cdot \cdot \cdot \cos \times_{n}) \cos \times_{n+1} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$(\varepsilon_{1}, \dots, \varepsilon_{n}) \in \mathcal{E}_{n}$$

$$+ \varepsilon_{n} \times_{n}) \cos \times_{n+1} = \frac{1}{2^{n}}$$

$$(\varepsilon_{1}, \dots, \varepsilon_{n}) \in \mathcal{E}_{n}$$

$$+ \varepsilon_{n} \times_{n} + \times_{n+1}) + \cos \left(\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{n} \times_{n} - \times_{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{n}}$$

$$\cos \left(\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{n} \times_{n} - \times_{n+1}\right) =$$

$$\cos \left(\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{n+1} \times_{n+1}\right).$$

2) a) On applique aussi le reiconnement par récurrence pour p  $\in //(/*$ .

Si p = 1 on a sin  $\sim_1$  sin  $\sim_2 = \frac{(-1)^1}{2}$  cos  $(\sim_1 + \sim_2)$  - cos  $(\sim_2 + \sim_2)$  qui est vaie.

On suppose l'égalité vraie pour 
$$\gamma$$
, on la montre nour  $p+1$ :

$$(\sin \times_1 \dots \sin \times_{2p}) \sin \times_{2p+1} \sin \times_{2p+2} = \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}}$$

$$(-1)^{\bullet}$$

$$\sin \alpha_{2p+1} = \frac{(-1)^{p-1}}{2^{2p}}$$

$$(-1)^{K} \cos (\xi_{1} \alpha_{1} + \dots + \xi_{2p} \alpha_{2p}) = \frac{(-1)^{p-1}}{2^{2p}}$$

$$(\xi_{1}, \dots, \xi_{2p}) \in \mathcal{E}_{1p}$$

$$\mathcal{E}_{m+1} = \left\{ (\mathcal{E}_{1}, \dots, \mathcal{E}_{m}, -1), (\mathcal{E}_{1}, \dots, \mathcal{E}_{m}, 1) \mid (\mathcal{E}_{1}, \dots, \mathcal{E}_{m}) \in \mathcal{E}_{m} \right\}$$
 et

$$\mathcal{E}_{m^{\frac{1}{2}}} = \left\{ (\xi_{1}, \dots, \xi_{m}, -1, -1), (\xi_{1}, \dots, \xi_{m}, -1, 1), (\xi_{1}, \dots, \xi_{m}, 1, -1), (\xi_{1}, \dots, \xi_{m}, 1, -1), (\xi_{1}, \dots, \xi_{m}, \xi_{m}, 1, -1), (\xi_{1}, \dots, \xi_{m}, \xi_{m}, 1, -1), (\xi_{1}, \dots, \xi_{m}, \xi_{m$$

On peut aussi généraliser .)

2) b) Première méthode : par raisonnement par récurrence pour / E ///\*
(comme les questions antérieures).

Deuxième méthode :

$$(\sin z_{1} \cdot \cdot \cdot \sin z_{2p}) \sin z_{2p+1} = \frac{(-1)^{p}}{2^{2p-1}} \frac{(-1)^{k}}{(\varepsilon_{1}, \dots, \varepsilon_{2p}) \varepsilon C_{2p}}$$

$$\cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p} \times_{2p}) \sin z_{2p+1} = \frac{(-1)^{p}}{2^{2p}} \cdot \frac{(-1)^{k}}{(\varepsilon_{1}, \dots, \varepsilon_{2p}) \varepsilon C_{2p}} \cdot \frac{(-1)^{k}}{(\varepsilon_{1}, \dots, \varepsilon_{2p}) \varepsilon C_{2p}} \cdot \frac{(-1)^{k}}{(\varepsilon_{1}, \dots, \varepsilon_{2p}) \varepsilon C_{2p}} \cdot \sin (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p} \times_{2p+1}) = \frac{(-1)^{p}}{2^{2p}} \cdot \sin (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \sin (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \sin (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \sin (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \sin (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \sin (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \sin (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \sin (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots + \varepsilon_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1} \times_{1} + \dots \times_{2p+1}) \varepsilon C_{2p+1} \cdot \cos (\varepsilon_{1$$

4.20. Soit 
$$P(x) = 2x^2 - 1$$
.

Démontrer que pour n >> 2 :

$$\sin 2^{n} x = 2^{n-1} \cdot \sin 2x \cdot \frac{n-1}{1} \quad \underbrace{p (\dots p (p (\cos x)) \dots)}_{i=1}.$$

## SOLUTION:

a) On va démontrer par récurrence que pour  $n \in \mathbb{Z}^n$  on a :  $\sin 2^n x = 2^n \sin x \cos x \cos 2^1 x \cos 2^2 x ... \cos 2^{n-1}x$ ; (1) rans le cas n = 1, c'est évident.

Supposons l'égalité vraie pour n, on démontre qu'elle est vraie aussi pour n + 1.

 $\sin 2 2^n = 2 \sin 2^n x \cos 2^n x = 2^{n+1} \sin x \cos x ... \cos 2^{n-1} x \cos 2^n x$ (on a utilisé l'hypothèse de récurrence).

b) On va démontrer par récurrence que pour i € /k/\* on a :

$$\cos 2^{i} x = p (...p (p (\cos x))...);$$
 (2)

Le cas  $\hat{i} = 1$  on  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = p(\cos x)$ 

Supposons l'égalité vraie pour i on démontre qu'elle est vraie aussi pour i + 1 :

$$\cos 2 \cdot 2^{i}x = 2 \cos^{2} 2^{i}x - 1 = p (\cos 2^{i} x) =$$

$$= p (p (...p (p (\cos x))...))$$
i fois

En reportant (2) dans (1) pour tout cos  $2^i$  x , il va en résulter l'égalité cherchée.

function continues  $f_i$ ,  $g_i: \hat{h}^S \to \hat{R}$ , aussi  $1 \le i \le n$ .

- a) Déterminer un procédé de résolution pour équation :  $\sin^{K} \frac{1}{f_1} (x_1, \dots, x_s) \cos^{P_1} g_1 (x_1, \dots, x_s) + \dots + \sin^{n} f_n (x_1, \dots, x_s) \cdot \cdots \cdot \cos^{P_n} g_n (x_1, \dots, x_s) = n.$
- b) Trouver une condition nécessaire et suffisante telle que l'équation antérieure soit équivalente au système d'équations :

$$\begin{cases} \sin^{K_1} f_1(x_1,...,x_s) + ... + \sin^{K_n} f_n(x_1,...,x_s) = n \\ \cos^{P_1} f_1(x_1,...,x_s) + ... + \cos^{P_n} f_n(x_1,...,x_s) = n. \end{cases}$$

#### SOLUTION:

qui soit pair.

a) Le membre droit de l'équation est une somme de n termes, chacun E [-1,1], Donc chaque terme doit être égal à l, puisque sinon on a S < n. D'où, l'équation est équivalente au système :

 $\sin^{K_{\bar{1}}} f_{i} (x_{1}, \dots, x_{s}) \cos^{P_{i}} g_{i} (x_{1}, \dots, x_{s}) = 1, i \in \left\{1, \dots, n\right\},$ qui est équivalent à

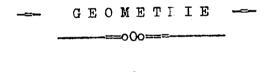
$$\begin{cases} \sin^{\frac{1}{2}} f_{1}(x_{1},...,x_{s}) = 1 \\ (1) \begin{cases} P_{1}(x_{1},...,x_{s}) = 1 \\ \cos^{\frac{1}{2}} g_{1}(x_{1},...,x_{s}) = 1 \end{cases}$$

$$\cos^{\frac{1}{2}} f_{1}(x_{1},...,x_{s}) = -1$$

$$\cos^{\frac{1}{2}} f_{2}(x_{1},...,x_{s}) = -1$$

$$\cos^{\frac{1}{2}} f_{3}(x_{1},...,x_{s}) = -1$$

qui sera résolu normalement; on obtient ensuite un système algébrique. b) Le système de b) est de même équivalent au système de (l'). Pour que l'équation de a) soit équivalente au système de b), c'est-à-dire à (l'), il faut éliminer le cis (l"). Donc, si  $K_i = \frac{r_i}{t_i}$ ,  $P_i = \frac{U_i}{V_i}$ ,  $r_i, t_i$ ,  $U_i$ ,  $V_i$  sont des entiers,  $1 \le i \le n$ , alors il faut que :  $V_i = \{1, \dots, n\}$ , il existe au moins un entier de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\{1, \dots, n\}$ , il existe au moins un entier de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\{1, \dots, n\}$ , il existe au moins un entier de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\{1, \dots, n\}$ , il existe au moins un entier de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\{1,$ 



5.31. On trace les projections M<sub>i</sub> d'un point M sur les côtés A<sub>i</sub> A<sub>i+1</sub>

du polygone A<sub>1</sub> ... A<sub>n</sub>. Montrer que :

$$\| M_1 A_1 \|^{2} + \cdots + \| M_n A_n \|^{2} = \| M_1 A_2 \|^{2} + \cdots + \| M_{n-1} A_n \|^{2} + \| M_n A_1 \|^{2}$$

# SOLUTION:

Pour tout i on a :

$$||MM_{1}||^{2} = ||MA_{1}||^{2} - ||A_{1}M_{1}||^{2} = ||MA_{1+1}||^{2} - ||A_{1+1}M_{1}||^{2}$$

Il en résulte que :

$$\frac{\|\mathbf{M}_{1} \mathbf{A}_{1}\|^{2} - \|\mathbf{M}_{1} \mathbf{A}_{1+1}\|^{2} - \|\mathbf{M}_{1}\|^{2} - \|\mathbf{M}_{1+1}\|^{2}}{(\|\mathbf{M}_{1} \mathbf{A}_{1}\|^{2} - \|\mathbf{M}_{1} \mathbf{A}_{1+1}\|^{2})} = \frac{2}{1}$$

$$= \frac{1}{1} (\| MA_i \|^2 - \| MA_{i+1} \|^2) = 0.$$

5.32. Sur une droite se trouvent les points  $A_1$ ,  $A_2$ ,...,  $A_n$  dans cet ordre.

Soit 
$$n_1 = \left[\frac{n}{2}\right]$$
 et  $n_2 = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ . Démontrer que

$$\frac{n_2}{\sum_{i=1}^{n_2} \|A_i A_{n+i}\|} = \frac{n_1}{\sum_{j=1}^{n_1} \|A_j A_{n+1-j}\|}.$$

## SOLUTION:

a) 
$$n = 2K \implies n_1 = n_2 = K$$
.

Notons 
$$\|A_i A_{i+1}\| = x_i$$
,  $1 \le i \le n-1$ . (1)

Ia relation de l'énoncé devient : 
$$\sum_{i=1}^{K} ||A_i A_{K+i}|| = \sum_{i=1}^{K} ||A_i A_{2K+1-i}||.$$

De (1) on a : 
$$\sum_{i=1}^{K} (x_i + x_{i+1} + \dots + x_{i+K}) = \sum_{i=1}^{K} (x_i + x_{i+1} + \dots + x_{i+K}) + x_{2K-i}$$

Le membre de gauche est égal à

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_K + x_{K+1}$$

qui est égal à 
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + Kx_K + (K-1) x_{K+1} + (K-2) x_{K+2} + \cdots + x_{2K-1}$$
. (2)

 $X_{K} + X_{K+1} + \cdots + X_{2k-1}$ 

Le membre de droite est égal à

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_K + x_{K+1} + \cdots + x_{2K-2} + x_{2K-1} + x_{2K-1} + x_{2K-2} +$$

qui est égal aussi à (2).

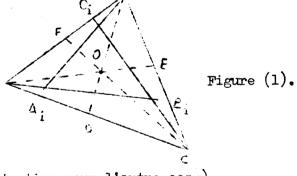
b)  $n = 2K + 1 \implies n_1 = K \text{ et } n_2 + K + 1$ . Ia démonstration est la même.

5.33. Soit AB" un triangle quelconque et 0 le centre du cercle inscrit dans ce triangle. Sur le côté BC on prend n points  $A_1, \ldots, A_n$ , dans cet ordre, tels que les droite AA1, ..., AA partagent l'angle BAC en n+1 parties égales. On procède de manière analogue pour les côtes CA et AB sur lesquels on prend les points  $B_1, \ldots, B_n$ , respectivement  $C_1, \ldots, C_n$ . Montrer que le point 0 appartient à la figure géomètrique déterminée par l'intersection des droites  $AA_i$ ,  $BB_i$ ,  $CC_i$ ,  $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ .

## SOLUTION:

- a) Si  $\frac{n+1}{2}$  =  $\left[\begin{array}{c} n+1\\ \hline 2 \end{array}\right]$  = i, alors AA<sub>i</sub>, BB<sub>i</sub> et CC<sub>i</sub> sont les bissectrices des angles A, B et C parce qu'elles partagent les angles en deux parties égales. Donc O est l'intersection de celles-ci.
- b) Si  $\frac{n+1}{2}$   $\neq$  i, alors AA<sub>i</sub>, BB<sub>i</sub>, CC<sub>i</sub> ne sont pas des bissectrices. Elles se coupent deux à deux formant un triangle qui se trouve à l'intérieur du triangle ABC. On obtient le petit triangle de la figure (1):

Soient AD, BE, CF les bissectrices des angles Â, Ê, Ĉ. Celles-ci peuvent tre à gauche des droite AA, , BB, , CC, (en regardant les droites comme partant de A vers A, etc.) ou à droite. Sur la figure (1) on a le cas où les droites se trou-



vent à gauche. On aura la même démonstration pour l'autre cas.)

Parce que AD se trouve à gauche de AA<sub>i</sub> et que  $0 \in AD$ , il en résulte que  $0 \in \triangle$  AA<sub>i</sub>C. Parce que BE se trouve à gauche de BB<sub>i</sub> et que  $0 \in BE$  on  $0 \in \triangle$  BB<sub>i</sub>A. De même,  $0 \in \triangle$  CC<sub>i</sub>B. D'où  $0 \in \triangle$  AA<sub>i</sub>C  $\triangle$  AB<sub>i</sub>A $\triangle$   $\triangle$  ACC<sub>i</sub>B.

5.34. On donne n droites sécantes deux à deux et non coplanaires trois à trois. Alors toutes ces droites passent par le même point.

#### SOLUTION:

On considère le cas n = 3.

Les droites  $d_1$  et  $d_2$  sont sécantes en M;  $d_3$  coupe  $d_1$  en M' et  $d_2$  en M' . Si M'  $\neq$  M et M''  $\neq$  M, alors les trois droites sont coplanaires. Absurde. Donc M' = M' = M.

Le cas n > 3 se réduit au cas antérieur.

Parmi les n droites on en prend 3 quelconques, qui satisferont la conclusion. Parmi ces trois droites on en prend 2 quelconques et une autre parmi les n - 3 droites restées. On obtient ainsi trois droites qui passent par un même point, qui est aussi M. Et le procédé continue jusqu'à ce qu'on épuise toutes les droites.

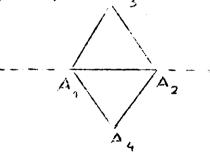
5.35. Soient n points  $A_1$ , ...,  $A_n$  dans un plan, n > m > 3, tels que m points quelconques d'entre eux forment un polygone régulier.

Montrer que n = m.

## SOLUTION:

- 1) Le cas m > 3. Soient m 1 points dans le plan. On ajoute un point nouveau et on constitue un polygone régulier de m côtés. Chaque polygone régulier s'inscrit dans un cercle. On peut considérer au début que les m 1 points se trouvent sur la circonférence d'un cercle. Evidemment, l'autre point (qui est ajouté) se trouve sur le même cercle, et il est bien déterminé, puisque le cercle est divisé en des arcs égaux. Mais, par les m 1 ≥ 3 points passe seulement un seul cercle. Donc à m 1 points on peut ajouter un seul point pour former un polygone régulier (de m côtés). Ainsi que, le nombre de points qui ont la propriété de l'énoncé ne peut pas dépasser m; mais, aussi, il ne peut pas être inférieur à m parce cu'on ne peut pas former un polygone de m côtés. D'où n = m.
- 2) Le cos m = 3. Alors m 1 = 2. Ayant deux points distincts, pour former un triangle équilatéral, nous pouvons trouver : soit un point dans un demi-plan, soit un point dans l'autre demi-plan (les demi-plans déterminés par la droite qui unit les deux points et partage le plan en deux parties).

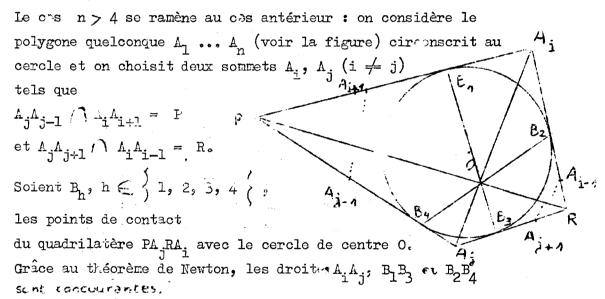
Si A A1A2A3 et A A1A2A4 sont équilatéraux, alors A1A3A4 n'est pas équilatéral. Et la démonstration est analogue au ccs 1).



5.36. On considère un polygone (qui a au moins 4 côtés) circonscrit à un cercle, et D l'ensemble des diagonales et des droits qui joignent les points de contact de deux côtés non adjacents. Alors D contient au moins 3 droits concourantes.

### SOLUTION:

Soit n le nombre des côtés. Si n=4, alors es deux diagonales et les deux droites qui joignent les points de contact de deux côtés non adjacents sont concourantés (conformément au théorème de Newton).



5.37. Dans un triangle ABC soient les céviennes AA', BB' et CC' qui se coupent en P. Calculer la valeur minimum desl'expressions:

$$E(P) = \frac{||AP||}{||PA^{2}||} + \frac{||BP||}{||PB^{2}||} + \frac{||CP||}{||PC^{2}||}, \text{ et } F(P) = \frac{||AP||}{||PA^{2}||} \cdot \frac{||BP||}{||PB^{2}||} \cdot \frac{||CP||}{||PA^{2}||}$$
où  $A^{2} \in [BC]$ ,  $B^{2} \in [CA]$ ,  $C^{2} \in [AB]$ .

## SOLUTION:

On applique le théorème de Van Aubel trois fois pour le triangle ABC, et il en résulte :

(1) 
$$\frac{\|AP\|}{\|PA^*\|} = \frac{\|AC^*\|}{\|C^*B\|} + \frac{\|AB^*\|}{\|AB^*\|}$$

(3) 
$$\frac{|| \text{CP} ||}{|| \text{CP} ||} = \frac{|| \text{CP}_{i} ||}{|| \text{CP}_{i} ||} + \frac{|| \text{CB}_{i} ||}{|| \text{CB}_{i} ||}$$

Si on fait l'addition deces trois relations et qu'on note

$$\frac{||AC^{1}||}{||C^{1}B||} = X > 0 , \frac{||AB^{1}||}{||B^{1}C||} = y > 0 , \frac{||BA^{1}||}{||A^{1}C||} = Z > 0, \text{ alors}$$
on obtient:  $E(P) = (X + \frac{1}{X}) + (y + \frac{1}{y}) + (Z + \frac{1}{Z}) > 2 + 2 + 2 = 6.$ 

La valeur minimum sera obtenu lorsque X = y = Z = 1,

c'est-à-dire que P sera le centre de gravité du triangle. En multipliant les trois relations en trouve que

$$F(p) = \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{4}\right) + \left(z + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{yz}{x} + \frac{x}{yz}\right) \geqslant \delta.$$

Si les points  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  divisent les côtés BC, CA, respectivement AB d'un triangle dans le rapport K, déterminer le minimum de l'expression :  $||AA_1||^2 + ||BB_1||^2 + ||CC_1||^2$ .

# SOLUTION:

On suppose K > 0 parce qu'on travaille avec des distances.

 $||BA_1|| = K ||BC||$ ;  $||CB_1|| = K ||CA||$ ;  $||AC_1|| = K ||AB||$ .

On applique trois fois le théorème de Stewart dans le triangle ABC, avec les segments  $AA_1$   $BB_1$ , respectivement  $CC_1$ :

|| AB ||<sup>2</sup> || BC || (1-K) + || AC ||<sup>2</sup> || BC ||·K - ||AA<sub>1</sub>||<sup>2</sup> || BC || = || BC ||<sup>3</sup> (1-K)K ou : (1)  $AA_1 ||^2 = (1-\zeta) ||AB||^2 + K ||AC||^2 - (1-F) ||K||BC ||<sup>2</sup>$ Analogiquement :

(2) 
$$\|BB_1\|^2 = (1 + K) \|BC\|^2 + K \|BA\|^2 - (1-K) K \|AC\|^2$$

(3) 
$$\|CC_1\|^2 = [-K] \|CA\|^2 + K \|CB\|^2 - (1-K) K \|AB\|^2$$

Par l'addition desces trois égalités on trouve :

 $||AA_1||^2 + ||BB_1||^2 + ||CC_1||^2 = (K^2-K+1) (||AB||^2 + ||BC||^2 + ||CA||^2),$ qui prend la valeur manimum lorsque  $K = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire le cas
où les trois drois s de l'énoncé sont les médianes du triangle.

Le minimum est  $\frac{3}{4}$  ( $||AB||^2 + ||BC||^2 + ||CA||^2$ ).

5.39. Dans le triangle ABC on trace les divites  $AA_1$  ,  $BB_1$  ,  $CC_1$  telles

que 
$$\|A_1B\|^2 + \|B_1C\|^2 + \|C_1A\|^2 = \|AB_1\|^2 + \|BC_1\|^2 + \|CA_1\|^2$$
.

Démontrer que celles-ci sont concourantes si au moins l'une d'elles est une médiane. Et réciproquement.

#### SOLUTION:

La relation du problème s'écrit aussi :

a 
$$(||A_1B|| - ||A_1C||) + b (||B_1C|| - ||C_1A||) + c (||C_1A| - ||C_1B||) = 0$$
,  
où a, b, c sont les côtes du triangle.

On note les trois termes  $\sim$ ,  $\beta$  et respectivement Y :

$$= a \left( \frac{||A_1B|| - ||A_1C||}{a} \right) = \frac{||A_1B|| - ||A_1C||}{a} = \frac{||A_1B|| - ||A_1C||}{a} = \frac{||BC|| - 2||A_1C||}{a}$$

$$= \frac{a - 2||A_2C||}{a} \left( \frac{a^2}{a^2 - \alpha} \right) = \frac{a}{2||A_1C||} = \frac{2a^2}{a^2 - \alpha}$$

$$= \frac{2a^2}{a^2 - \alpha} = \frac{a}{2||A_1C||} = \frac{2a^2}{a^2 - \alpha}$$

$$= \frac{2a^2}{a^2 - \alpha} = \frac{a}{2||A_1C||} = \frac{2a^2}{a^2 - \alpha}$$

$$\frac{2a^2-a^2+x}{a^2-x} = \frac{a-\frac{|A_1^c|}{|A_1^c|}}{|A_1^c|} \cdot \text{Donc} \frac{\frac{|A_1^B|}{|A_1^c|}}{|A_1^c|} = \frac{a^2+x}{a^2-x} \cdot \text{De}$$

même : 
$$\frac{\|B_1C\|}{\|B_1A\|} = \frac{b^2+1}{b^2-1} \text{ et } \frac{\|C_1A\|}{\|C_1B\|} = \frac{c^2+x}{c^2-x}. \text{ Conformément au}$$

théorème de Céva, les trois droite de l'énoncé sont concourantes si et seulement si :

$$\frac{\|\mathbf{A}_{1}^{B}\|}{\|\mathbf{A}_{1}^{C}\|} \cdot \frac{\|\mathbf{B}_{1}^{C}\|}{\|\mathbf{B}_{1}^{A}\|} \cdot \frac{\|\mathbf{C}_{1}^{A}\|}{\|\mathbf{C}_{1}^{B}\|} = 1 \iff (\mathbf{a}^{2} + \times)(\mathbf{b}^{2} + \kappa)(\mathbf{c}^{2} + \kappa^{2}) = 0$$

$$= (\mathbf{a}^{2} - \times)(\mathbf{b}^{2} - \kappa^{2})(\mathbf{c}^{2} - \kappa^{2}) \iff (\mathbf{a}^{2} + \infty)(\mathbf{b}^{2} + \kappa^{2})(\mathbf{c}^{2} + \kappa^{2}) = 0$$

(On a utilisé le fait que  $\times + / + \times = 0$ .)

Mais  $\times = 0 < \Longrightarrow ||A_1B|| = ||A_1C||$ , c'est-à-dire  $AA_1$  est médiane.

Idem dans les cas /3 = 0 ou  $\frac{1}{3} = 0$ 

Réciproquement: si l'une de ces trois droits est médiane, alors ou / ou / prend la valeur zéro, d'où 🗻 / 5 = 0, et donc elles sont concourentes conformément au théorème de Céva.

5.4. Dans un riangle on trace les céviennes AA, BB, et CC, sécantes en P. Montrer que

$$\frac{PA}{PA_1} \cdot \frac{PB}{PB_1} \cdot \frac{PC}{PC_1} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A}.$$

#### SOLUTION:

Dans le triangle ABC on applique

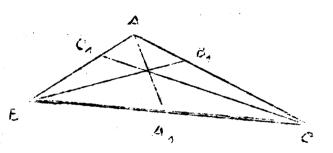
le théorème de Céva:

(1) 
$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = -AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1$$

Dans le 🛆 AA<sub>1</sub>B, coupé par la transversale CC<sub>1</sub>, on applique

le théorème de Ménélaus :

(2) 
$$AC_1 \cdot BC \cdot A_1P = AP \cdot A_1C \cdot BC_1$$



Dans le  $\land$  BB\_C, coupé par la transversale AA\_1, on applique aussi le théorème de Ménéla.s :

(3) 
$$BA_1 \cdot CA : B_1P = BP \cdot B_1A \cdot CA_1$$

On applique encore une fois le théorème de Ménélaus dans le  $\triangle$  CC, A coupé par la transversale BB, :

(4) 
$$AB:C_1P\cdot CB_1 = AB_1\cdot CP\cdot C_1B$$

On divise chaque relation (2), (3) et (4) par la relation (1), et il vient:

$$(5) \quad \frac{PA}{PA_{7}} = \frac{BC}{BA_{7}} \cdot \frac{B_{1}A}{B_{7}C}$$

(6) 
$$\frac{PB}{PB_1} = \frac{CA}{CB_1} \cdot \frac{C_1B}{C_1A}$$

(7) 
$$\frac{PC}{PC_1} = \frac{AB}{AC_1} \cdot \frac{A_1^C}{A_1B}$$

On multiplie (5) par (6) et par (7), et on a :

$$\frac{PA}{PA_{1}} \cdot \frac{PB}{PB_{1}} \cdot \frac{PC}{PC_{1}} = \frac{AB \cdot BC : CA}{A_{1}B \cdot B_{1}C : C_{1}A} \cdot \frac{AB_{1} \cdot BC_{1} \cdot CA_{1}}{A_{1}B \cdot B_{1}C \cdot C_{1}A},$$

mais la dernière fraction est égale à l'conformément au théorème de Céva.

5.44. Soit un triangle ABC qui a tous les angles aigus, et on considère A'B'C', le triangle formé par les pieds de ses hauteurs.

Dans quelles conditions l'expression

 $||A'B'|| \cdot ||B'C'|| + ||B'C'|| \cdot ||C'A'|| + ||C'A'|| \cdot ||A'B'||$  est—elle maximum ?

# SOLUTION:

On a

$$\triangle ABC \sim \triangle A^{\dagger}B^{\dagger}C \sim (1)$$

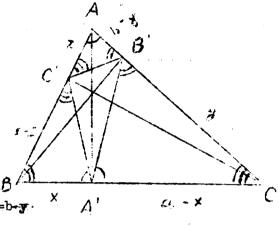
$$\sim \triangle AB^{\dagger}C^{\dagger} \sim \triangle A^{\dagger}BC^{\dagger}$$

Un note

$$|| BA' || = X, || CB' || = y,$$

||AC'|| = Z. Il en résulte  $\beta$ Que ||AC'|| = a - X, ||B'A|| = b - y.

$$|C'B| = c-Z.$$



$$\triangle A^{\dagger}BC^{\dagger} \sim \triangle A^{\dagger}B^{\dagger}C \implies \frac{\|A^{\dagger}C^{\dagger}\|}{a-x} = \frac{x}{\|A^{\dagger}B^{\dagger}\|}$$
 (2)

$$\Delta A'BC' \sim \Delta AB'C' \longrightarrow \frac{||A'C'||}{Z} = \frac{c-Z}{||B'C'||}$$
(3)

$$\triangle AB'C' \sim \triangle A'B'C \implies \frac{\|B'C'\|}{y} = \frac{b-y}{\|A'B'\|}$$
 (4)

De (2), (3) et (4) on tire que la somme des produits de l'énoncé est égale à :

$$X (a - X) + y (b - y) + Z (c - Z) = \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2) - (X - \frac{a}{2})^2 - (y - \frac{b}{2})^2 - (Z - \frac{c}{2})^2$$
 qui atteint son

maximum lorsque  $X = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{b}{2}$ ,  $Z = \frac{c}{2}$  c'est-à-dire que les

hauteurs tombent au milieu des côtés, donc lorsque & ABC est équilatéral. Le maximum de l'expression est  $\frac{1}{4}$  ( $a^2 + b^2 + c^2$ ).

5.42. Soint points distincts A<sub>1</sub>,..., A<sub>n</sub> sur la circonférence d'un cercle de centre 0 et de rayon R.

Montrer qu'il existe deux points  $A_i$  et  $A_j$  tels que  $||\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}|| \ge 2R \cos \frac{180^{\circ}}{n}$ .

# SCLUTION:

Comme 
$$S = A_1 OA_2 + A_2 OA_3 + \cdots + A_{n-1} OA_n + A_n OA_1 = 360^{\circ}$$
 et que  $\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \quad \forall A_i OA_{i+1} > 0^{\circ}$ , il en résulte qu'il existe au moins un angle

< A<sub>j</sub> CA<sub>j</sub> <  $\frac{360^{\circ}}{n}$  (sinon il en résulterait que S >  $\frac{360^{\circ}}{n}$  . n = = 360°)

$$\overrightarrow{OA}_{i} + \overrightarrow{OA}_{j} = \overrightarrow{OM} \implies$$

$$||\overrightarrow{OA}_{i} + \overrightarrow{OA}_{j}|| = ||\overrightarrow{OM}||.$$
Ie quadrilatère

OA, MA, est un rhombe.

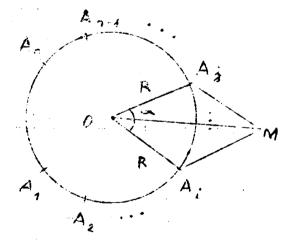
Lorsque est plus petit,

||OM || est plus grand.

Comme 
$$\propto < \frac{360^{\circ}}{n}$$
,

il en résulte que :

$$|| \overrightarrow{OM} || = 2 R \cos \frac{\sim}{2} \geqslant 2 R \cos \frac{180^{\circ}}{n}$$



7.43. Déterminer le nombre maximum de points qui se trouvent dans un cercle ou sur sa circonférence, tels que la distance entre deux quelconques des points soit supérieure ou égale au rayon.

#### SCLUTION:

Le côté d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle a la même dimension que le rayon du cercle respectif. D'où il existe au moins 7 points dans un cercle qui ont la propriété de l'énoncé : un point dans le centre du cercle, et 6 points sur la circonférence du cercle tels que les six points constituent les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans ce cercle.

les 7 points choisis sont pris d'une manière optimale. Par exemple, si l'on essaye de construire l'ensemble de points qui ont la propriété de l'énoncé du problème, il ne serait pas du tout optimal de premier point différent du centre du cercle

Ainsi, dans la figure
geométrique ci-jointe, en
prenant C<sub>1</sub> dans l'intérieur
du cercle et différent du
certre, alors dans la portion
hachurée (qui est un cercle
de même rayon que le cercle
initial, et de centre C<sub>1</sub>, cou-

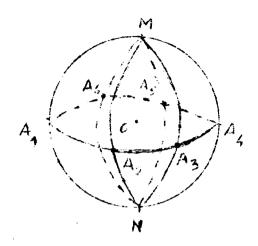
ni sur la circonférence.

pé par celui-ci) on ne peut plus prendre aucun point. Donc le rieux est d'avoir la portion hachurée la plus petite. Il en résulte que C<sub>1</sub> doit être sur la circonférence. D'où cela implique que les autres point seront : 5 sur la circonférence tels que les 6 points vont constituer un hexagone régulier et l'autre dans le centre du cercle. Ainsi on a construit 7 points.

5.44. Combien de points se trouvent dans une sphère (et sur sa surface), tels que la distance entre deux quelconques d'entre eux soit supérieure ou égale au rayon ?

## SCLUTION:

On considère l'un des grands cercles de la sphère, déterminé par le plant Al OA4, où 0 est le centre de la sphère. Sur la circonférence de celui-ci on prend les points Al, Al, ..., At tels qu'ils constituent un hexagone régulier - donc, la distance



A<sub>1</sub> A<sub>3</sub> | > au rayon de la sphère, pour i + j. On construit un plan A<sub>2</sub> A<sub>5</sub> MNO perpendiculaire au plan A<sub>1</sub> OA<sub>4</sub> qui coupe la sphère d'après le cercle A<sub>2</sub> A<sub>5</sub> MN. Sur la circonférence de celui-ci on prend aussi 6 points qui constituent un hexagone régulier, parmi lesquels seront A<sub>2</sub> et A<sub>5</sub>. Puis, on trace le troisième grand cercle de la sphère, déterminé par A<sub>3</sub>, A<sub>6</sub>, M et N. Aussi, sur la circonférence de ce dernier cerlce on prend 6 points, les sommets d'un hexagone régulier, parmi lesquels A<sub>3</sub> et A<sub>6</sub>. Etc. On a en tout 6 + 4 + 0 = 10 points, et si on ajoute le centre de la sphère on obtient 11 points qui gardent la propriété de l'énoncé.

Cette façon de construire les points est optimale. Si on commence la construction des points, par exemple en prenant un point A qui n'appartient pas à la surface de la sphère et qui est différent du centre de la sphère, alors la sphère de centre A et de même rayon va occuper une grande zone dans la sphère initiale, mais le but est que cette zone soit la plus petite possible. D'où A appartient à la surface. Et la démonstration continue de même.

- 5.45. Soient n points distincts dans un plan, reliés deux à deux par une droite;
  - a) Quel est le nombre maximum de droites que l'on pourrait construire avec ces points ?
  - b) si m points seulement, 1 < m < n, sont colinéaires, combien de droites distinctes a-t-on?
  - c) montrer qu'on ne peut pas avoir (n-2) (n+1) droites, quelle que soit la façon dont on arrange les n points distincts.

#### SCLUTION:

Soient  $A_1, \dots, A_n$  les n points distincts.

- a) Si ceux-ci sont trois à trois non colinéaires, alors on peut former toutes les droites possibles :

  A<sub>i</sub> A<sub>j</sub> avec i < j et  $(i,j) \in \begin{cases} 1, \dots, n \end{cases}$  Donc  $\frac{n(n-1)}{2}$  droites.

c)
$$\frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} - 1$$

Si les n points sont trois à trois non colinéaires, on a vu qu'on a  $\frac{n (n-1)}{2}$  droites distinctes. Si m points sont colinéaires, on a  $\frac{m (m-1)}{2} - 1$  droites en moins. Mais  $\frac{m (m-1)}{2} - 1 = 1 < \cdots > m^2 - m - 4 = 0$  qui n'admet pas de solution naturelle.

Par exemple, si on a 3 points colinéaires, on élimine 2 droites du total de  $\frac{n(n-1)}{2}$ , mais pas une droite comme il faudrait.

5.47. Soient n points distincts dans le plan, trois à trois non colinéaires  $A_1, \ldots, A_n$ . Trouver le lieu géométrique des points  $M \neq A_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tel que n'importe quelle droite qui passe par M et qui ne contient aucun point  $A_i$   $(1 \leq i \leq n)$  divise le plan en deux demi-plans qui contiennent 1'un  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  et 1'autre  $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$  points.

# SCLUTION:

Notons  $\mathcal{T}$  le plan qui contient les points  $\mathbb{A}_1,\dots,\mathbb{A}_n$  et soit  $\boldsymbol{\prec}$  le lieu géométrique cherché.

- 1) Si n = 1, alors bien sûr  $\propto = \Pi \frac{1}{2} A_1$ .
- 2) Si n = 2,  $\alpha = \begin{bmatrix} A_1, A_2 \end{bmatrix} A_1, A_2$ , où  $\begin{bmatrix} A_1, A_2 \end{bmatrix}$  représente le segment de droite qui unit les points  $A_1$  et  $A_2$ .
- 3) n > 2.
- a) n = 2K. Soit  $d_1$  la droite qui passe par  $\Lambda_1$  et par un point  $\Lambda_{s_1}$ ,  $2 \le s_1 \le n$ , telle que d'un côté et de l'autre de la droite  $d_1$  se trouvent K 1 d'entre les points  $\Lambda_2, \dots, \Lambda_{s_1-1}, \Lambda_{s_1+1}, \dots, \Lambda_n$ . On a  $\left[\frac{2K}{2}\right] = \left[\frac{2K+1}{2}\right] = K$ . Evidenment  $\infty$  est inclus dans  $\left[\Lambda_1, \Lambda_{s_1}\right]$ . On procéde ainsi pour tous les points  $\Lambda_i$ ,  $1 \le i \le n$ , et on trouve que  $\infty$  =  $\prod_{i=1}^{n} \Lambda_i, \Lambda_{s_i}$ . Donc, si tous ces

segments se coupent en un point, alors celui-ci sera  $\times$ ; sinon  $\times = \emptyset$ .

b) n = 2K + 1; On a  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = K$  et  $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil = K + 1$ .

Pour  $\Lambda_1$  construisons le triangle  $\Lambda_1$   $\Lambda_u$   $\Lambda_v$ , où  $\Lambda_u$  est tel que la droite  $\Lambda_1$   $\Lambda_u$  partage le plan en deux demi-plans, l'un contenant K - 1, l'autre K points d'entre les points  $\Lambda_i$  restés; cependant que  $\Lambda_v$  est tel que la droite  $\Lambda_1$   $\Lambda_v$  partage aussi le plan en deux demi-plans, l'un contenant K et l'autre K - 1 points d'entre les points  $\Lambda_i$  restés. Evidenment  $\times \subseteq \Delta \Lambda_1$   $\Lambda_u$   $\Lambda_v$  On procède de même pour tous les points  $\Lambda_i$  , 1 < i < n, et on trouve que  $\times = \bigcap_{i=1}^n \Delta \Lambda_i$   $\Lambda_u$ ,  $\Lambda_v$ .

5.48. Montrer qu'une sphère ne peut pas être incluse dans l'union de deux sphères de rayons strictement inférieurs au sien.

#### SCLUTION:

Soit S la sphère, C son grand corcle, r le rayon de la sphère (implicitement r est le rayon du corcle C). Par l'absurde, soient  $S_1$  et  $S_2$  les sphères qui comprennent cette sphère et telles que celles-ci sont strictement inférieures à S. On note  $C_1$  (respectivement  $C_2$ ) le grand cercle de la  $S_1$  (respectivement  $S_2$ ) et  $S_1$  (respectivement  $S_2$ ) le rayon de la sphère  $S_1$  (respectivement  $S_2$ ) implicitement  $S_1$  (respectivement  $S_2$ ) implicitement  $S_2$ ). On fait l'intersection entre S et  $S_1$ .

a)  $S/S_1 = \begin{cases} P \end{cases}$  (un seul point commun)

Soit 0 le centre de la sphère S. Construisons un plan II qui contient le rayon OP.

 $T \cap S = C$ ,  $C \cap S_1 = P$  Donc  $S_2 \supset C - P$ , c'est-à-dire  $C \cap S_2 \supset C - P$ 

b)  $S / S_1 = C_{SS_1}$  (un cercle). If on résulte que le rayon de celui-ci  $r_{C_{SS_1}} \le \min \left\{ r_1, r \right\} = r_1 < r$ .

Alors il existera un grand corcle C de la sphère S qui a la propriété que C  $\bigcap$  S<sub>1</sub> =  $\emptyset$  . Donc S<sub>2</sub>  $\supset$  C, et r<sub>2</sub>  $\geqslant$  r, ce qui est absurde.

- c) Ic  $\cos S_1 \subset S$  et la surface de  $S_1$  ne coupe pas la surface de  $S_1$  alors il existera un grand cercle C de la sphère S tel que  $C \cap S_1 = \emptyset$ .

  Donc  $S_2 \supset C$ , et alors  $r_2 \geqslant r$ , ce qui est aussi absurde.
  - d) Mêmo démonstration lorsque S / S1 = # et S1 # S.

6.50. On considère les nombres naturels  $K_1$ , ...,  $K_p$  qui constituent une suite arithmétique. Montrer que si  $a_1$ , ...,  $a_n$  constituent une suite arithmétique (respectivement géométrique) alors  $a_{K_1}$ , ...,  $a_{K_n}$  constituent une suite arithmétique (respectivement géométrique).

# SCLUTICN:

 $K_i = K_1 + (i - 1) r_1$ ,  $1 \le i \le p$ , et  $r_1$  est la raison de cette suite arithmétique.

a) Lorsque a, ..., a constituent une suite arithmétique,

alors 
$$a_{K_{1}} = a_{K_{1}} + (K_{1} - K_{1}) r = a_{K_{1}} + rr_{1} (i - 1)$$
,

où  $1 \le i \le p$  et r est la raison de la suite  $a_1, \dots, a_n$ .

Donc  $a_{K_1}$ ,...,  $a_{K_p}$  constituent aussi une suite arithmétique de raison  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1$  .

b) Lorsque a<sub>1</sub>, ..., a<sub>n</sub> constituent une suite géométrique,

de raison q, alors 
$$a_{K_i} = a_{K_1} \cdot q^{K_i - K_1} = a_{K_1} \cdot (q^{r_1})^{i-1}$$

où 1  $\leq$  i  $\leq$  p. Donc  $a_{K_1}$  , ...,  $a_{K_p}$  constituent une suite géométrique de raison q .

Socient les suites de naturels  $X_n$  et  $Y_n$  telles que  $X_n = aY_n$ ,  $y_n = y_n / (1 + n) = 1$ . De la progression arithmétique  $y_n = aY_n$ , on élimine les termes de rang  $y_n = x_n / (1 + n)$ . Montrer que parmi les termes restés il existe une sous-progression arithmétique.

## SCLUTION:

On observe que si les naturels  $i_1, \dots, i_s$  constituent une progression arithmétique alors  $b_i$ , ...,  $b_i$  ont la même propriété, puisque :

$$2b_{ij} = 2 \int_{b_1} b_1 + (i_j - 1) r = 2b_1 + (2i_j - 2) r = 2b_1 + (i_{j-1} + i_{j+1} - 2) r = (b_1 + (i_{j-1} - 1) r) + (b_1 + (i_{j+1} - 1) r) = b_{ij-1} + b_{ij+1}$$

(On a utilisé  $2i_j = i_{j-1} + i_{j+1}$ ).

Donc, on peut remplacer b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>, ... par 1, 2, ...

Il faut construire une progression arithmétique  $a_1, a_2, \cdots$  telle que  $a_{i+1} \neq X_n$ ,  $\forall (i, n) \leq /// = ///*$ .

- A) Le cas a = 0 est trivial.
- B) Soit a  $\neq$  0.

 $a_{i+1} = a_1 + i \cdot r$ , où r est la raison. Donc  $a_1 = ?$ , r = ? tels que  $a_1 + ir \neq a \cdot Y_n$ ,  $\sqrt[N]{i, n} \in /[N]/*$ . (1) D' où  $i \neq \frac{a \cdot Y_n - a_1}{r}$ . Parce que  $i \in /[N]/*$ , on pose la condition :  $(aY_n - a_1) \cdot \frac{1}{r} \in \sqrt[N]/*$ .

On prend r = a > 2 (parce que  $a \neq 0$ ,  $a \neq 1$  et  $X_n$  et  $Y_n$  sont des suites naturelles, d'où  $a \in \mathbb{N}$ ) of  $a_1 = a - 1$ .

Ainsi  $i \neq \frac{aY_n - a + 1}{a} = Y_n - 1 + \frac{1}{a} \in \mathbb{N}$  et la relation (1) est vérifiée.

6.52. Montrer que 
$$(\hat{j}_1 \circ \dots \circ \hat{j}_n)' = \frac{n}{i-1} \hat{j}_i \circ \hat{j}_{i+1} \dots \circ \hat{j}_n$$
.

#### SCLUTION:

Pour i = 1 on a immédiatement le résultat.

Supposons l'égalité vraie pour i = n - 1. Alors

$$(\{j_0, ..., i_n\}) = (\{j_0, i_0, ..., i_n\})^* = (\{j_1, i_1, ..., i_n\})^*$$

$$(\{j_0, ..., i_n\})^* = (\{j_0, i_0, ..., i_n\})^* = (\{j_0, ..., i_n\})^* = (\{j_$$

dans  $M_2$ , et inf  $A = \infty$  dans  $M_2$ .

Alors : il existe inf A dans M si et seulement si  $\infty \leq$  M . Nême question avec sup A.

# SCLUTION:

Suffisance.

Si inf  $A = \infty$  dans  $M_2$  et  $\infty \subseteq M_1 \subset M_2$ , alors evidenment inf  $A = \infty$  dans  $M_1$ .

Nécessité.

Soit = inf A dans M . Donc . . .

On sait que inf  $A = \infty$  dans  $\frac{M}{2}$  par hypothèse.

- 1) Size  $'> \infty$ , alors inf  $A=\infty$   $'\neq \infty$  dans  $M_2$ . Contradiction.

Si  $X \leftarrow A$ , alors  $\propto$  n'est pas égal à inf A dans M<sub>2</sub> (contradiction); donc  $X \leftarrow A$ .

S'il existe  $y' \in (\infty', y')$  tel que  $y' \in A$ , alors  $x \neq i$ nf A dans M, . Contradiction.

S'il n'existe pas  $\chi' \in (\times', \chi')$  tel que  $\chi' \in \Lambda$ , alors  $\chi' \neq \inf \Lambda$  dans  $M_1$ . Contradiction.

#### Donc:

Démonstration analogue pour sup A.

il existe une fonction  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  de période T et telle que  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  de période T et telle que que  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  de période T et telle que que  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  a la période  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  de période T et telle que que  $f: \mathbb{R}$  s'annule au moins en n-l points dans un intervalle de longueur T.

#### SCLUTION:

Soient  $n \in \mathbb{N}/*$ ,  $T \in \mathbb{R}_+^*$  et la fonction  $f : \widehat{\mathbb{R}} \to \widehat{\mathbb{R}}$ , de période T, qui a la représentation graphique suivante :

$$(1) \qquad 0 \qquad \frac{2^{\frac{1}{2}} \quad 3^{\frac{7}{5}} \cdots (n-n)^{\frac{1}{2}}}{n}$$

(2) 
$$\frac{y}{n} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{3n} \cdot \frac{1}{3n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

dono la période de celle-ci est  $\frac{T}{n}$ .

Evidenment, il existe une infinité de telles fonctions, parce qu'on peut remplacer les demi-cercles de (1) par d'autres courbes telles que la propriété de l'énoncé soit conservée.

Nous devons montrer le deuxième point :

Le cos n = 1 est banal. Soit n > 1. Soit K le nombre des points pour lesquels x s'annule dans un intervalle de longueur T. Mais K est non nul, puisqu'autrement il en résulterait que x ou x ou x or x or

(3) Puisque  $|\chi|(x)$  s'annule au moins une fois (on a K > 1), il en résulte que  $|\chi|(x)$  s'annule dans un intervalle de longueur  $\frac{T}{n}$  cu dans l'intérieur de celui-ci ou à une extrémité de celui-ci.

Mais, dans un intervalle de longueur T on a n intervalles de longueur  $\frac{T}{n}$ . Donc | | s'annule au moins n-1 fois dans un intervalle de longueur T, et sachant (3) il en résulte la dernière question de problème.

Soient les fonctions positives  $\{1,\dots,y_n\}$  sur un intervalle I, telles qu'elles varient dans le même sens sur cet intervalle. Alors  $\{1,\dots,y_n\}$  varie dans ce même sens sur I.

#### SCLUTION:

On considère que toutes les i sont croissantes. (Démonstration analogue si toutes les i sont décroissantes.).

Cn utilise le raisonnement par récurrence.

Pour i = 2. Soit 
$$X_1 < X_2$$
.
$$\frac{\binom{y}{1} \binom{x}{2} \binom{x}{2} - \binom{x}{1} \binom{x}{2} \binom{x}{1}}{x_2 - x_1} = \binom{y}{1} \binom{x}{1} \frac{\binom{y}{2} \binom{x}{2} - \binom{y}{2} \binom{x}{1}}{x_2 - x_1} + \binom{y}{2} \binom{x}{2} \frac{\binom{x}{2} - \binom{y}{1} \binom{x}{2} - \binom{y}{1} \binom{x}{1}}{x_2 - x_1} > 0.$$

6.56. Scit n un naturel non nul.

- a) Déterminer les fonctions  $p:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , impaires, dérivables 2 n fois, telles que la dérivée d'ordre 2 n soit non négative.
- b) Déterminer les fonctions  $g: \widehat{\mathcal{H}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{H}}$ , paires, dérivables 2n - 1 fois, telles que la dérivée d'ordre 2n - 1 soit non négative.

# SCLUTION:

a) 
$$f(X) = -f(-X)$$
,  $\forall X \in \mathbb{R}$ . Il en résulte que  $f^{(2n)}(X) = -f^{(2n)}(X)$ 

Mais 
$$\hat{y}^{(2n)}(X) > 0$$
 et  $\hat{y}^{(2n)}(-X) \leq 0$ , cela implique que  $\hat{y}^{(2n)}(X) = 0$  sur  $\hat{R}$ 

Par l'intégration 2n fois, nous obtenons :

$$\begin{cases} (x) = a_{2n-1} x^{2n-1} + a_{2n-2} x^{2n-2} + \dots + a_1 x + a_0, a_1 \in \mathbb{R} \\ 0 \le i \le 2n-1. \end{cases}$$

Puisque & est impaire, il en résulte :

$$a_{2n-1} x^{2n-1} + a_{2n-2} x^{2n-2} + ... + a_1 x + a_0 = a_{2n-1} x^{2n-1} - a_{2n-2}$$

$$x^{2n-2}$$
 +...+  $(-1)^{i+1}a_i x^i$  +...+  $a_1 x^1 - a_0$ . On obtient  $a_{2n-2} = a_{2n-4} = a_{2n-4}$ 

$$= ... = a_r = 0$$

Done 
$$X(X) = a_{2n-1} X^{2n-1} + a_{2n-3} X^{2n-3} + ... + a_1 X.$$

b) 
$$g(X) = g(-X), \forall X \leq \mathbb{R}$$
. Il en résulte que  $g^{(2n-1)}(X) = (-1)^{2n-1} g^{(2n-1)}(-X)$ .

$$g^{(2n-1)}(X) > 0$$
 et  $g^{(2n-1)}(-X) \leq 0$ , cela implique que  $g^{(2n-1)}(X)=0$  sur  $\widehat{K}$ 

Par l'intégration 2n fois, on a

g (X) = 
$$b_{2n-2}X^{2n-2} + b_{2n-3}X^{2n-3} + \dots + b_1X + b_0$$
, avec  $b_i \in \mathbb{R}, 0 \le i \le 2n-2$ .

Parce que g est paire, il en résulte que :

$$b_{2n-2} X^{2n-2} + b_{2n-3} X^{2n-3} + \dots + b_1 X + b_0 = b_{2n-2} X^{2n-2} - b_{2n-3} X^{2n-3} + \dots$$

...+
$$(-1)^{i}$$
  $b_{i}$   $X^{i}$  +...+  $(-1)b_{1}$   $X + b_{0}$  Nous obtained  $b_{2n-3} = b_{2n-5} = \cdots$ 

6.57. Une fonction  $f: \widehat{\mathbb{R}} \to \widehat{\mathbb{R}}$  admet un centre de symétrie si et seulement si il existe deux constantes réelles a et b telles que la fonction g(X) = (X + a) - b soit impaire. Dans ces conditions, le centre de symétrie a pour coordonnées (a,b).

#### SCLUTION:

Nécessité.

Soit C  $(x, \beta)$  le centre de symétrie. On pose a = x et  $b = \beta$ Faisons une translation des axes, en déplaçant l'origine en C (a,b). Les formules de changement du repère OXY en CX'Y' sont :

$$\begin{cases} x^i = x - a \\ y^i = y - b \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x^i + a \\ y = y^i + b \end{cases}$$

Donc  $y = \begin{cases} (x) \text{ devient } y^1 + b = \begin{cases} (x^1 + a), \text{ ou} \end{cases}$   $y' = \begin{cases} (x + a) - b. \text{ Notons } g(x') = \begin{cases} (x' + a) - b, g : 1 \end{cases} \rightarrow 1 \end{cases}$ . La fonction g admet un centre de symétrie, qui est même l'origine des axes. D'où g est impaire.

Suffisance.

g étant impaire, il en résulte que g admet l'origine des axes pour centre de symétrie.

On fait une translation des axes, en déplaçant l'origine en C" (-a,-b). Ainsi les fortules de changement du repère CXY en C" X" Y" sont :

$$\begin{cases} x'' = x + a \\ y'' = y + b \end{cases}$$
  $\begin{cases} x = x'' - a \\ y = y'' - b \end{cases}$ 

 $\begin{cases} x'' = x + a \\ (y'' = y + b) \end{cases} \begin{cases} x = x'' - a \\ y = y'' - b \end{cases}$   $\text{Donc } y = g(x) = \{ (x + a) - b \text{ devient } y'' - b = \} (x'' - a + a) - b,$   $\text{c'est-à-dire } y'' = \{ (x''). \end{cases}$ 

Comme g admet le centre de symétrie O (0,0) dans le repère CXY, cela implique donc que / admet le centre de symétrie 0 (a,b) dans le repère O'' X'' Y''.

Let Dans un système d'axes orthogonaux, une fonction  $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  admet un axe de symétrie si et seulement si il existe une constance réelle a telle que la fonction g(x) = f(x+a), est paire.

Dans ces conditions, l'axe de symétrie à pour équation x = a.

#### SCLUTION:

Nécessité.

Soit x = 1 axe de symétrie de la fonction  $\{ \}$ . On pose  $a = \infty$ . Faiscns une translation des axes, en déplaçant l'origine en 0' (a,o). Les équations de changement du repère (OXY) en $(O^1 X^1 Y^1)$  sont :

) 
$$x' = x - 2$$
 (  $x = x' + a$  )  $y' = y$  (  $x = x' + a$  )  $y' = y$  (  $x = x' + a$  )  $y' = y'$  (  $x = x' + a$  )  $y' = y'$  (  $x = x' + a$  )  $y' = y'$  Denc  $y = y'$  ( $x' + a$ ) =  $y'$  ( $x' + a$ )

Suffisance.

Comme g est paire, on a que g admet l'axe OY pour axe de symétrie. On fait une translation des axes aussi, en déplaçant l'origine en O" (-c.,o). Le passage du repère (OXY) en (O" X" Y") est donné par :

$$\begin{cases} x'' = x + a \\ y'' = y \end{cases} = \begin{cases} x = x'' - a \\ y = y'' \end{cases}$$

Dono  $y = g(x) = \frac{y(x+a)}{x^a}$  devient  $y'' = \frac{y}{x^a}(x'')$ .

g admet pour axe de symétrie la droite x = 0,

d'où il en résulte que  $\frac{y}{x^a}$  admet pour axe de symétrie la droite x'' = a.

6.53. On consider les fonctions continues  $\Lambda$ , B,  $C: I \longrightarrow \mathbb{R}$ , où I est un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ , avec  $\Lambda(x) \leq C(x) \leq B(x) \quad \forall x \in I$ .

Soient  $x_1, \dots, \in I$ ,  $x_1 \leq x_2$ , et  $\Lambda(x_1) = \int_{\mathbb{R}} (x_1)$ ,  $B(x_2) = \int_{\mathbb{R}} (x_2)$ , où  $\int_{\mathbb{R}} (x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}} (x_2) = \int_{\mathbb{R}} (x_3) = \int_{\mathbb{R}} (x_3)$ 

SOLUTION: Prouve par l'absurde :

€.60.Trouver les réels a, b, c, tels que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a(2x^3 - x^2) + b(x^3 + 5x^2 - 1) + c(-3x^3 - x^2)}{a(5x^4 - x) + b(-x^4) + c(4x^4 + 1) + 2x^2 + 5x} = 1.$$

#### SCLUTION:

Cn peut écrire

(1) 
$$\lim_{X \to -\infty} \frac{(2a + b - 3c) X^{3} + (-a + 5b - c) X^{2} - b}{X \to -\infty} = 1.$$

$$X \to -\infty (5a - b + 4c) X^{4} + 2X^{2} + (-a + 5) X + C$$
Si  $5a - b + 4c \neq C$  alors la limite de (1) est égale à  $C \neq 1$ .

Donc  $5a - b + 4c = 0$ . Il en résulte que  $2a + b - 3c = C$ ,

parce que sinon, la limite de (1) serait égale à  $+ c \neq 1$ .

Donc  $\lim_{X \to -\infty} \frac{(-a + 5b - c) X^{2} - b}{2X^{2} + (-a + 5) X + c} = 1$ , d'où  $\frac{-a + 5b - c}{2} = 1$ .

Ainsi les réels a, b, c vérifient le système :

$$\begin{cases} 5a - b + 4c = 0 \\ 2a + b - 3c = 0 \\ -a + 5b - c = 2 \end{cases}$$

Cn réscut et on trouve les valeurs

$$a = -\frac{2}{109}$$
,  $b = \frac{46}{109}$ ,  $c = \frac{14}{109}$ .

6.61. Soient les nombres naturels a, , b, compris entre 0 et 9, avec

$$a_1 \neq 9 \neq b_m \text{ et } a_1 + 1 = x_1, 9 - a_i = y_i,$$
  
 $i = \overline{2, n}, \text{ et } 9 - bj = Zj, j = \overline{1, m}. \text{ Calculer :}$ 

$$\lim_{P \to \infty} \left[ \frac{\overline{C_{i}x_{1}} - \left( \sum_{i=2}^{n} \overline{C_{i}C_{i}C_{i}y_{i}} + \sum_{K=0}^{p} \sum_{j=1}^{m} \overline{C_{i}C_{i}C_{i}C_{j}} \right) \right] \cdot$$

SCLUTION:  
On pose 
$$\propto = \sum_{i=2}^{n} \frac{0,0...0y_i}{0,0...0y_i} = 0, Cy_2...y_n$$
, et

$$f(p) = \sum_{K=0}^{p} \sum_{j=1}^{m} \frac{0,0...0Z_{j}}{0,0...0Z_{j}} = 0,0...0Z_{1}...Z_{m}...Z_{1}...Z_{m}.$$

Si on prend  $t = b_m + 1$ , l'on a:

$$Y_{p} = \overline{0, X_{1}} - (\infty + 3(p)) = \overline{0, a_{1} \cdot \cdot \cdot a_{n} b_{1} \cdot \cdot \cdot b_{m} \cdot \cdot \cdot b_{1} \cdot \cdot \cdot b_{m} b_{1} \cdot \cdot \cdot b_{m-1} t}.$$

$$1 \cdot \cdot \cdot \cdot p-1 \qquad p$$

$$(1)$$

Montrons que  $y_{p} \xrightarrow{p \to \infty} \overline{c_{,a_{1} \dots a_{n}}(b_{1} \dots b_{m})} = y_{o}$ .

Soit  $\xi > 0$ .  $\exists p_0 = p(\xi) \in //(/, p_0 \text{ étant le plus petit nombre naturel})$ qui a la propriété : po > - lg ( .10 n , tel que  $\forall p > p_o$ ,  $p \in M/$ ,  $|X_p - Y_o| = 10^{-n-pm} < 10^{-n}.10^{e_g \cdot 10^n}$ =  $\xi$ , et donc il en résulte (1).

6.62.Cn considère les fonctions  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  telles que  $\lim_{x \to \infty} |f_1(x)| = \infty$  et  $\lim_{x \to \infty} |f_2(x)| = \alpha$ . Montrer que  $\lim_{x \to \infty} (|f_1(x)|) = 0$  existe et calculer cette limite, où représente la partie entière de  $\infty$ .

to the control of the first terminal te SCLUTION:
(1) Donc  $\lim_{x \to \infty} \begin{cases} 1(x) = +\infty \text{ ou } -\infty \end{cases}$ . Con note  $\begin{cases} 1(x) = x \end{cases}$ . Discussion. A) Si a = 0, alors  $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{2(x)}} = +\infty$  ou  $-\infty$  ov  $\ddagger$ et de même  $\lim_{x \to \infty} \left| \frac{1}{x^{2}} \right| = +\infty$  ou  $-\infty$ . D'où  $\lim_{x \to \infty} \left( x \right) = +\infty$ ou - ~ (d'après (1) et A) ) ou on ne peut rien conclure, B) a  $\leq 1$  et a  $\neq 0$   $\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} \end{cases} \neq 0$ . D'où, aussi,  $\lim_{x \to \infty} \chi(x) = +\infty$ ou - co(d'après (1) et B), c'est-à-dire d'après (1) et le signe de  $\left|\frac{1}{2}\right|$ ). C) a > 1  $\Longrightarrow \left(\frac{1}{a}\right) = 0$ . On a  $\oint_{2} (x) \xrightarrow{v} a > 1$ . Alors un voisinage de a ; l $\notin$  V . Soit une suite  $x_n \longrightarrow \infty$  , alors  $\chi_2(x_n)$  ----- a (conforme à la définition de la limite). (x<sub>n</sub>) est une suite réelle qui tend vers a. Il en résulte qu'en dehors de 🐧 on trouve 🛮 tout au plus un nombre

un nombre limité de termes qui ont la propriété que  $\binom{1}{2}(x_i) < 1$ . Donc, la plupart des termes se trouvent dans V, d'où il existe  $n \in \mathbb{N}/*$  tel que : V i n V V V V est la suivante :

limité de termes de la suite  $\frac{2}{2}(x_n) \le 1$  il existe tout au plus

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt[3]{2}(x_1)} \end{array}\right], \dots, \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt[3]{2}(x_n)} \end{array}\right], 0, 0, 0, \dots; donc, à l'exception$$

d'un nombre limité de termes non nuls, cette suite est suite nulle. Il en résulte que la suite  $(x_n) = (x_n) = (x_n)$ 

donc, aussi, à l'exception d'un nombre limité de termes non muls, cette nouvelle suite c'est la suite constante nulle.

Ainsi  $\lim_{X \to \infty} \begin{cases} (x) = 0. \end{cases}$ 

6.6 3. Calculer (sans utiliser l'Hospital):

from 
$$\frac{n}{|x|} = \frac{\sqrt{3}(x) - \sqrt{3}(x_c)}{\sqrt{3}(x_c) - \sqrt{3}(x_c)}$$
 $\times \rightarrow x_c = 1 + 1$ 

dans les conditions où les racines antérieures existent. Généraliser.

#### SCLUTICH:

On multiplie aque fraction au numérateur et au dénominateur par les conjugués du numérateur et du dénominateur.

Soit 
$$1 \le i \le n$$
, on note  $A = \bigvee_{i=1}^{i} \bigvee_{j=1}^{i} \bigvee_{j=1}^{i$ 

D'où, la limite de l'énoncé sera égale à :

$$\frac{1}{\left(\int_{i=1}^{n} \frac{s_{i}}{r_{i}} \cdot \left(\int_{i} (x_{o})\right) \frac{s_{i} - r_{i}}{s_{i} r_{i}}\right)}$$

Généralisation:
$$\frac{1}{1} \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} (x) - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} (x_{c}) \right) = \begin{cases}
\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{2} (x_{o}) - \frac{1}{2} \frac{1}{2} (x_{c}) \right) \\
\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{2} (x_{o}) - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} (x_{c}) - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} (x_{c}) \right) \\
\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{2} (x_{c}) - \frac{1}{2} \frac{1$$

dans les conditions où les racines antérieures existent. Si n < m la limite n'existe pas parce que le dénominateur est égal à zéro, alors que le numérateur est non nul; d'où les deux limites latérales sont différentes.

//-) L G E B R E

$$A = \left\{ \begin{array}{l} X \mid X = \sum_{i=1}^{n} a_{i} K_{i} + a \text{, avec } (K_{1}, \dots, K_{n}) \in \mathbb{Z}^{n}, \text{ et} \\ a_{1}, \dots, a_{n}, \text{ a sont des constantes entières telles que } (a_{1}, \dots, a_{n}) = 1 \right\}$$

$$\text{et } B = \left\{ \begin{array}{l} X \mid X = \sum_{j=1}^{m} b_{j} K_{j} + b, \text{ avec } (K_{1}, \dots, K_{m}) \in \mathbb{Z}^{m}, \text{ et} \\ b_{1}, \dots, b_{m}, \text{ b sont aussi des constantes entières} \right\}.$$

#### SCLUTION:

Tout d'abord on démontrera que  $A = \frac{7}{2}$ .

Bien sûr  $A \subseteq \mathbb{Z}$ , et aussi  $\mathbb{Z} \subseteq A$  puisque  $\mathbb{Y}_Z \in \mathbb{Z}$   $\mathbb{Z} (K_1^o, ..., K_n^o) \in \mathbb{Z}$   $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$   $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ 

parce que le plus grand diviseur commun  $(a_1, ..., a_n) = 1$  et l divise Z - a .

On voit tout-de-suite que B  $\subseteq$   $\mathbb{Z}$  .

Si  $(b_1, ..., b_m) = 1$  alors  $B = \overline{//} = A$ , au contraire  $B \subset A$  et  $B \neq A$ .

7.65. Soit p un nombre premier et M un ensemble de p nombres naturels consécutifs. Montrer que M ne peut pas être divisé en deux sous-ensembles disjoints M<sub>1</sub> et M<sub>2</sub>, avec M<sub>1</sub> U M<sub>2</sub> = M, tel que le produit des nombres de M<sub>1</sub> soit égal au produit des nombres de M<sub>2</sub>.

#### SCLUTION:

Parce que M contient p nombres naturels consécutifs, alors M constitue un système complet de restes modulo p. Donc :

 $\exists n_0 \in M : n_0 = \mathcal{M}_p \text{ et } \forall n \in M - \{n_0\}$ ,  $n \neq \mathcal{M}_p$ .

On considère que  $n_o \in M_1$  (même démonstration dans le cas contraire). Le produit des nombres de  $M_1$  se divise par p, mais le produit des nombres de  $M_2$  ne se divise pas par p, puisque p est un nombre premier et qu'il n'existe aucun élément de  $M_2$  qui soit multiple de p. D'où, le produit de  $M_1$  ne peut pas être égal au produit de  $M_2$ .

7.66. Soient M un ensemble qui contient m nombres naturels, m > 2, et  $n \in \mathbb{N}/*$ , n < m. On pose  $K = \left\lceil \frac{m-1}{n} \right\rceil + 1$ , où  $\left\lceil X \right\rceil$  représente la partie entière de X.

Montrer qu'il existe un sous-ensemble M' de M, tel que :

- a) M¹ contient au moins K éléments
- b) la différence entre deux éléments quelconques de M est multiple de n.

SCLUTION:

L'ensemble M a la forme :  $M = \left\{ a_1, \dots, a_m \right\}$ , où tous les  $a_i \in \mathbb{N}$ .  $\forall i \in \left\{ 1, \dots, m \right\}$ ,  $a_i = \mathbb{N}, n + r_i$  avec  $r_i \in \left\{ 0, 1, 2, \dots, n-1 \right\}$ .

Soit  $m = \mathbf{q} \cdot n + r$ ,  $\mathbf{q} \in \mathbb{N}$ ,  $0 \le r \le n - 1$ . Parce que  $n \le m$ , il en résulte que  $q \in \mathbb{N}$ .

Pour que l'ensemble  $M \subseteq M$ .

Pour que l'ensemble  $M \subseteq M$ .

Pour que l'ensemble  $M \subseteq M$ .

Les restes obtenus par la division par n sont :

0, 1, ..., n - 1. On a n classes d'équivalence modulo n.

Le problème se réduit à la démonstration qu'il existe une classe qui contient au moins K éléments. M' sera justement cette classe.

1) Cas où 
$$\mathbf{r} = 0$$
. Donc  $K = \left[\frac{m-1}{n}\right] + 1 = \left[\frac{a \cdot n - 1}{n}\right] + 1 = q$ .

Si les m = q:n éléments de M sont distribués également dans les n classes, alors chaque classe contient q éléments, et le problème est résolu.

Dans le cas contraire, il existe au moins une classe qui contient au moins q éléments et là aussi, le problème est résolu.

2) Cas où 
$$r \neq 0$$
. Donc  $K = \left[\begin{array}{c} \frac{n-1}{n} \\ \end{array}\right] + 1 = \left[\begin{array}{c} \frac{4 \cdot n + r - 1}{n} \\ \end{array}\right] + 1 = q + 1$ .

Les m = nq + r éléments de M sont distribués n'importe comment dans les n classes, il en résulte qu'il existe au moins une classe qui contienne au moins q + l éléments (sinon il en résulterait qu'on aurait au maximum q·n éléments < m), et le problème est complètement résolu.

7.47. Soient les polynômes homogènes  $P_n(x, y)$  et  $Q_n(x, y)$  de n - ième degré en x et y. Si  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$  alors  $\frac{P_n(a_1, b_1)}{Q_n(a_1, b_1)} = \frac{P_n(a_2, b_2)}{Q_n(a_2, b_2)}$ .

#### SCLUTION:

Soient 
$$P_n(x, y) = \infty$$
,  $x^n + \infty_1 x^{n-1} y^1 + \cdots + \infty_{n-1} xy^{n-1} + \infty_n y^n$  et
$$Q_n(x, y) = \beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} y^1 + \cdots + \beta_{n-1} xy^{n-1} + \beta_n y^n.$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \sum_{a_2} \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Longrightarrow \frac{a_1^n}{a_2^n} = \frac{b_1^n}{b_2^n} = \frac{a_1^{n-1} b_1^i}{a_2^{n-1} b_2^i} =$$

$$= \frac{a_1^{n-1} b_1^i}{a_2^{n-1} b_2^i}, \quad 0 \le i \le n.$$

Puisque la somme des numérateurs divisée par la soume des dénominateurs est égale à chaque rapport, on a :

$$\frac{a_1^n + x_1 a_1^{n-1} b_1^1 + \dots + x_n b_1^n}{a_2^n a_2^n + x_1 a_2^{n-1} b_2^1 + \dots + x_n b_2^n} = \frac{a_1^n}{a_2^n}.$$

De même on obtient:

$$\frac{\beta_0 a_1^n + \beta_1 a_1^{n-1} b_1^1 + \dots + \beta_n b_1^n}{\beta_0 a_2^n + \beta_1 a_2^{n-1} b_2^1 + \dots + \beta_n b_2^n} = \frac{a_1^n}{a_2^n},$$

donc  $\frac{P_n(a_1,b_1)}{P_n(a_2,b_2)} = \frac{Q_n(a_1,b_1)}{Q_n(a_2,b_2)}$ , d'où la conclusion.

7.68: Soit un nombre naturel p > 2 et une suite telle que  $a_1 = 1 , a_{n+1} = p \cdot a_n + 1 , \forall n \in \mathbb{Z}/^{\bullet}. \text{ Nontrer que } \forall K \in \mathbb{Z}/^{\bullet},$  K s'écrit uniquement de la façon suivante :

 $K = t_1 a_{n_1} + \cdots + t_1 a_{n_1}$ 

evec  $1 \le t_1 \le p-1$  pour  $i \in \{1,2,\ldots,l-1\}$  et  $1 \le t_1 \le p$  et  $n_1 > \ldots > n_1$  .

Solution:  $p^n = 1$  On déduit tout de suite que  $a_n = \frac{p^n - 1}{p-1}$ 

nombres naturels , strictement croissante , illimitée . Donc :

$$\exists n_1 \in ///$$
 tel que  $a_{n_1} \le k < a_{n_1+1} = pa_{n_1} + 1$ .

D'où K s'écrit uniquement de la façon

 $K= t_1 \cdot a_{n_1} + r_1 \leq pa_{n_1}, \text{ avec o } \leq r \leq a_{n_1}$   $Si \ r_1=0 \ , \text{ il en résulte que } t_1=\frac{K}{a_{n_1}} \text{ et } 1 \leq t_1 \leq \frac{a_{n_1}}{a_{n_1}} = p.$ 

Si  $r_1 \neq 0$ , il en résulte qu'il existe  $n_2 \in \mathbb{N}(/^{\bullet}$  tel que

$$a_{n_2} \leqslant r_1 < a_{n_2+1} = p \cdot a_{n_2} + 1 \longrightarrow r_1 = t_2 \cdot a_{n_2} + r_2$$

$$r_1 < a_{n_1} \implies n_2 < n_1$$
;  $t_1 = \frac{k-r_1}{a_{n_1}} \le \frac{k-1}{a_{n_1}} < \rho$ ;

donc 1  $\leftarrow$   $t_1 < p-1$ 

Ainsi K s'écrit uniquement :  $k=t_1$   $a_{n_1}$   $+t_2$   $a_{n_2}$  +  $r_2$  ,et le procédé continue . Après un nombre limité de pas on arrive à r=0. On fait la même démonstration pour  $n_i > n_{i+1}$  ,  $i \in \{1, \ldots, l-1\}$  et  $1 \le t_i \le p-1$  ,  $i \in \{1, \ldots, l-1\}$  et  $1 \le t_i \le p$  et le problème est résolu.

# 

Si  $a_1, \dots, a_n$ , b sont des nombres réels positifs, avec  $b \leq a_1 + \dots + a_n$ , et  $\infty \notin \left\{ -a_1, \dots, -a_n, -b \right\}$ , alors  $\frac{b}{\times + b} \leq \frac{a_1}{\times + a_1} + \dots + \frac{a_n}{\times + a_n}$ 

## Solution :

On utilise le raisonnement par récurrence pour  $n \in /\!\!/(/^{\circ})$ 

Pour n=1, sib 
$$\leq a_1$$
, on a  $\frac{b}{x+b} - \frac{a_1}{x+a_1} \leq o \leq \cdots$ 

$$(=)$$
  $\frac{\times (b-a_1)}{(\times + b)(\times + a_1)} \le 0$ ; qui est vrai, en tenant compte de l'hy-

pothèse. On suppose l'inégalité vraie pour toutes les valeurs inférieures c. égales à n. On le démontrera pour n+1 :

 $b \leqslant (a_1 + \cdots + a_n) + a_{n+1}$  et , conformément à l'hypothèse de récurrence on a :

$$\frac{b}{\times + b} \leqslant \frac{(a_1 + \cdots + a_n)}{\times + (a_1 + \cdots + a_n)} + \frac{a_{n+1}}{\times + a_{n+1}}.$$

mais  $a_1+\cdots+a_n \leq a_1+\cdots+a_n$  , donc si on applique encore une fois l'hypothèse de récurrence on obtient :

Harrist Commence of the Commen

$$\frac{b}{\sqrt{a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{a_{n+1}}} + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1}}}.$$

7.70. Cn donne l'expression  $E(x,y) = x^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ ,  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ , avec les réels A, B, C, D, E et F, et  $A^2 + C^2 \neq C$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que E(x,y) admette un extrémum.

#### SCLUTTON:

Puisque  $A^2 + c^2 \neq 0$ , il résulte qu'au moins A ou C est non nul, soit A; (les résultats seront analogues si  $c \neq 0$ ).

On suppose que E (x,y) admet un extrémum.

$$E(x,y) = A(x^{2} + \frac{3}{A}xy + \frac{D}{A}x) + Cy^{2} + Ey + F = A(x + \frac{B}{2A}y + \frac{D}{2A})^{2} - \frac{B^{2}}{4A}y^{2} - \frac{D^{2}}{4A} - \frac{2BD}{4A}y + Cy^{2} + Ey + F = A(x + \frac{B}{2A}y + \frac{D}{2A})^{2} + \frac{4AC - B^{2}}{4A}y^{2} + \frac{4AE - 2BD}{4A}y + (F - \frac{D^{2}}{4A}).$$

 $\frac{4AC - B^2}{4A} \neq 0$ , parce que sinon = E(x,y) n'aurait pas d'extrémum.

$$E(x,y) = A(x + \frac{B}{2A}y + \frac{D}{2A})^2 + \frac{4AC - B^2}{4A} \cdot \left[y^2 + 2\frac{2AE - BD}{4AC - B^2}y + \frac{AC - B^2}{4AC - B^2}\right]$$

$$+\left(\frac{2AE-BD}{4AC-B^2}\right)^2\left[-\frac{4AC-B^2}{4A}\cdot\left(\frac{2AE-BD}{4AC-B^2}\right)^2+\left(F-\frac{D^2}{4A}\right)=A\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$+ \frac{B}{2\Lambda} y + \frac{D}{2\Lambda} \right)^{2} + \frac{4AC - B^{2}}{4\Lambda} \left( y + \frac{2AE - BD}{4AC - B^{2}} \right)^{2} + \left[ F - \frac{D^{2}}{4\Lambda} - \frac{(2AE - BD)^{2}}{4\Lambda (4AC - B^{2})} \right].$$
(1)

Evidemment E (x,y) admet un extrémum seulement si  $\Lambda$  et  $\frac{4AC-B^2}{4A}$  ont le même signe, c'est-à-dire  $\Lambda:\frac{4AC-B^2}{4A}>0$ , d'où  $4AC-B^2>0$ , ce qui constitue une condition nécessaire pour que E (x,y) admette un extrémum (lorsque les deux sont positifs on a un minimum, sinon un maximum). Mais  $4AC-B^2>0$  constitue aussi une condition suffisante, puisque E (x,y) s'écrit comme (1) et que  $\Lambda$  et  $\frac{4AC-B^2}{A}$  ont le même signe.

7.71. Scient les entiers  $A = \overline{a_1 \cdot \cdot \cdot a_{2n}} + \overline{a_{2n} \cdot \cdot \cdot a_{1}}$  et  $B = \overline{a_1 \cdot \cdot \cdot a_{n}} - \overline{a_n \cdot \cdot \cdot a_{1}}$  écrits en base  $b \in ////4 - \frac{1}{2}$ . Montrer que A est divisible par b + 1 et B est divisible par b - 1

للكراب والمتلاف والمتارين والمتارين والمتارين والمتارين والمتارين والمتارين والمتارين والمتارين والمتارين

#### SCLUTION:

Calculons les critères de divisibilité par b + 1 et par b - 1 en base b.

$$b^{i} \equiv (-1)^{i} \pmod{b+1} \text{ et } b^{i} \equiv 1 \pmod{b-1}, \forall i \in /\!\!/(-1)^{i} = (-1)^{i} = (-1)$$

7.72. Soient a un naturel et p un entier non nul. Déterminer le nombre des éléments de l'ensemble  $M = \begin{cases} a, \overline{aa}, \dots, \overline{a \dots a} \end{cases}$  qui sont divisibles par p. Discussion.

#### SCLUTION:

Soit a en base 10 écrit sous la forme :

$$a = \overline{a_1 \cdots a_s}$$
, avec  $a_i \in \mathbb{N}/$ ,  $1 \le i \le s$ ,  $s \in \mathbb{N}/*$ .

Un élément  $\propto \in \mathbb{N}$  est  $\propto = a \dots a$ , avec  $1 \le n \le n$ , n entier.

$$\propto = a \cdot 10^{(n-1)s} + a \cdot 10^{(n-2)s} + \dots + a \cdot 10^{1 \cdot s} + a = a (1 + 10^s + \dots + a)$$

+  $10^{(n-1)s}$ ) = a  $\frac{10^{sn}-1}{10^{s}-1}$ . It faut trouver les n pour lesquels  $\propto i$  p.

Soit d = (a,p). Alors  $a = d \cdot a_1$  et  $p = d \cdot p_1$  et  $(a_1, p_1) = 1$ . Donc,

il faut déterminer n tel que  $\not a_1 = \frac{10^{sn} - 1}{10^s - 1} : \not a_1$ .

- 1) Si  $(p_1, 10) \neq 1$ , alors aucun élément de M n'est divisible par p.
- 2) Si  $(p_1, 10) = 1$ , soit d l'ordre de la classe de restes de 10 par rapport au module  $p_1$   $(10^S 1)$  . On a ainsi :

 $10^{e^{t}} - 1 \equiv 0 \pmod{p_1} (10^{s} - 1)$ , donc  $10^{t} - 1 \equiv 0 \pmod{(10^{s} - 1)}$  et

il en résulte que  $J = K \cdot s$ , avec  $K \in \mathbb{M}/*$ . Alors il existe exactement

 $\left[\begin{array}{c} \underline{m} \\ \overline{K} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \underline{ms} \\ \overline{\delta} \end{array}\right]$  éléments de M qui sont divisibles par p.

#### SOLUTION:

Tout nombre naturel A s'écrit sous la forme :

A = 
$$p_1$$
 ...  $p_s$  , (bien sûr  $\Lambda \notin \left\{ 0, 1 \right\}$ )

où  $p_i$  sont des nombres premiers,  $i \in \left\{ 1, \ldots, s \right\}$  et  $p_i \neq p_j$  pour  $i \neq j$ ,  $x \in \mathbb{N}/*$  avec  $i \in \left\{ 1, \ldots, s \right\}$ ,  $s \in \mathbb{N}/*$  (c'est la forme canonique du nombre, qui est unique).

Cn note d (A) = le nombre des diviseurs positifs de A.

Alors d (
$$I$$
) =  $\frac{s}{\prod_{i=1}^{s}}$  ( $\times_i + 1$ ).

Notre problème se réduit à la démonstration que l'équation  $\frac{s}{1}$  ( $\times_i+1$ )=  $= K \text{ a des solutions dans } (///*)^s \text{ ; (les incommues sont } \times_1, \dots, \times_s, \text{ et s.)}.$ On pose  $s = 1 \in ///* \text{ et } \times_1 = K - 1 \in ///* \text{ et on obtient } K - 1 + 1 = K.$ D'où tous les nombres  $n = p^{K-1}$ , avec un nombre premier quelconque, ont exactement K diviseurs positifs (on a une infinité de nombres n parce qu'on a une infinité de nombres premiers p).

On point volta que l'équation (1) a besucoup d'autres solutions. Par enemple, si  $K = \frac{1}{1}$  avec tous les  $\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} + \frac{1}{K_4} + \frac{1}{K_4} + \frac{1}{K_5} + \frac{1$ 

7.74. Sachant que  $a_i$ ,  $i \in \left\{1, 2, \dots, n\right\}$ , satisfont aux conditions d'existence pour tous les n logarithmes, résoudre l'équation :  $\log_{a_1} \log_{a_2} \dots \log_{a_n} x = b$ 

#### SOLUTION:

$$\log_{a_{1}} (\log_{a_{2}} \log_{a_{3}} \dots \log_{a_{n}} x) = b$$

$$(=) \log_{a_{2}} \log_{a_{3}} \dots \log_{a_{n}} x = a \text{ ou } \log_{a_{2}} (\log_{a_{3}} \dots \log_{a_{n}} x) = a \text{ is } 0$$

$$(=) \log_{a_{2}} \log_{a_{3}} \dots \log_{a_{n}} x = a \text{ ou } \log_{a_{2}} (\log_{a_{3}} \dots \log_{a_{n}} x) = a \text{ is } 0$$

$$(=) \log_{a_{3}} \log_{a_{4}} \dots \log_{a_{n}} x = a \text{ ou } \log_{a_{3}} (\log_{a_{3}} \dots \log_{a_{n}} x) = a \text{ is } 0$$

$$(=) \log_{a_{3}} \log_{a_{4}} \dots \log_{a_{n}} x = a \text{ ou } \log_{a_{3}} (\log_{a_{3}} \dots \log_{a_{n}} x) = a \text{ is } 0$$

$$(=) \log_{a_{3}} \log_{a_{3}} \dots \log_{a_{n}} x = a \text{ ou } \log_{a_{3}} (\log_{a_{3}} \dots \log_{a_{n}} x) = a \text{ ou } 0$$

$$(=) \log_{a_{3}} \log_{a_{3}} \dots \log_{a_{n}} x = a \text{ ou } \log_{a_{3}} (\log_{a_{3}} \dots \log_{a_{n}} x) = a \text{ ou } 0$$

 $\begin{array}{c}
a_{1}^{b} \\
 & a_{n-4} \\
 & a_{n-3} \\
 & a_{n-3}
\end{array}$   $\begin{array}{c}
a_{n-4} \\
 & a_{n-3} \\
 & a_{n-2} \\
 & a_{n-2}
\end{array}$ 

qui est la solution cherchée.

# 7.75. Si a, b $\in \mathbb{R}^*$ et b $\neq$ 1 et $\forall \propto \in \mathbb{Q}$ a $\neq$ b , alors log a $\notin \mathbb{Q}$ . Et réciproquement.

#### SCLUTION:

Tout d'abord on voit que ce problème donne une extension à quelques problèmes particuliers; par exemple "montrer que  $\log_{21}^{10}$  n'est pas un nombre rationnel", etc...

La démonstration se fera par l'absurde.

On suppose que  $\log_b a = \frac{m}{n}$  ( , avec le p.g.c.d (m,n) = 1. Il en résulte que b = a. En élevant à la puissance n cette égalité, il vient :  $b^m = a^n$ , avec m,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Mais,  $\forall \alpha \in Q$ ,  $a \neq b$ , ce qui implique que  $\forall \alpha \in Q$ ,  $a^n \neq b^n \propto$ ,

où  $n \prec c$   $\mathcal{G}$  (parce que a > 0 of b > 0).

Donc, si on ne peut pas écrire a comme une puissance rationnelle de b, on ne peut pas non plus écrire a comme une puissance rationnelle de b. Ainsi, il en résulte que  $a^n \neq b^m \quad \forall m \in \mathcal{O}$ 

# Contradiction.

Donc log a # 12 .

Réciproquement. Si log, a # 12 , alors bien sûre

 $a \neq b$   $\forall x \in C$ , parce que sinon il en résulterait que  $\log_b b = x \in C$ .

Et le problème est complètement démontré.

7./6. Soit  $s \neq 0$  un nombre naturel. Déterminer les nombres naturels n qui vérifient la propriété que  $\left[\begin{array}{c} \hat{V} \cap \\ \end{array}\right]$  divise n. (on note  $\left[\begin{array}{c} x \end{array}\right]$ , la partie entière de x.)

SOLUTION:  $\frac{1}{\Psi n \in \mathbb{N}}, \exists p \in \mathbb{N} = p^{S} = p^{S} + c_{S}^{1} p^{S-1} + ... + c_{S}^{S-1} p^{1} + ... + c_{S}^{S-$ 

$$0 \le K < C_S^1 p^{S-1} + ... + C_S^{S-1} p^1 + 1, \text{ et } K \in \mathbb{N}/.$$

Il en résulte  $\left[\sqrt[5]{n}\right]$  = p. Parce que  $\left[\sqrt[5]{n}\right]$  divise n, on obtient p

divise K. Dom K = x : p, avec  $\propto \epsilon / (/$  et

$$0 \le K \le (p+1)^{S} - (p^{S} + 1).$$

$$D'où 0 \le x \le \frac{(p+1)^{S} - (p^{S} + 1)}{p} \le /\!\!/.$$

Donc, les nombres naturels qui ont la propriété de l'énoncé sont :  $n = p^S + \infty \cdot p, \text{ avec } x \in \mathbb{N}/\text{ et } 0 \le x \le \frac{(p+1)^S - (p^S+1)}{p}, \text{ } p \in \mathbb{N}/\text{ } x$ 

et aussi la solution triviale n = 0, puisque C divise C.

7.77. Soit p un nombre naturel,  $p \geqslant 2$  et la fonction :

$$\beta_{p}(x) = \left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x}{p^{2}}\right] + \cdots$$
,  $x \in \mathbb{Z}_{+}$ 

Montrer que si  $x = (a_n \cdot ... a_1 a_0)_n$  alors:

$$\beta_{p}(x) = \frac{1}{p-1} \left[ x - (a_{0} + a_{1} + ... + a_{n}) \right]$$

SCLUTION:

$$x = (a_n \dots a_1 a_0)_p = a_n p^n + \dots + a_1 p^1 + a_0$$

$$\left[\frac{x}{p}\right] = a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_1 parce que \left[\frac{a_0}{p}\right] = 0$$

$$\left[\frac{x}{p^2}\right] = a_n p^{n-2} + a_{n-1} p^{n-3} + \dots + a_2 parce que 0 \le a_1 p^1 + a_0 < p^2$$

$$\left\{\begin{array}{c} x \\ \hline n \\ p \end{array}\right\} = a_n$$

$$\left|\frac{x}{m}\right| = 0$$
 pour tout m naturel,  $m > n + 1$ .

Donc 
$$p(x) = a_n (1 + ... + p^{n-1}) + a_{n-1} (1 + ... + p^{n-2}) +$$

$$+ \cdots + a_2(1+p) + a_1 = a_n \frac{p^n - 1}{p-1} + \cdots + a_2 \frac{p^2 - 1}{p-1} + a_1 \frac{p-1}{p-1} =$$

$$= (a_n p^n + ... + a_1 p^1 - a_n - ... - a_1) \cdot \frac{1}{p-1} =$$

$$= \frac{1}{p-1} \left[ x - (a_0 + a_1 + \dots + a_n) \right] .$$

# 7.75 Démontrer l'inégalité:

$$\left(\frac{a_{1}^{2}}{a_{2}^{2}} + \frac{a_{2}^{2}}{a_{1}^{2}}\right) + \left(\frac{a_{2}^{2}}{a_{3}^{2}} + \frac{a_{3}^{2}}{a_{2}^{2}}\right) + \dots + \left(\frac{a_{n}^{2}}{a_{1}^{2}} + \frac{a_{1}^{2}}{a_{2}^{2}}\right) >$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_{1}}{a_{2}} + \frac{a_{2}}{a_{1}}\right)^{2} + \left(\frac{a_{2}}{a_{3}} + \frac{a_{3}}{a_{2}}\right)^{2} + \dots + \left(\frac{a_{n}}{a_{1}} + \frac{a_{1}}{a_{n}}\right)^{2},$$
où  $a_{1}, \dots, a_{n} \in \mathbb{R}^{3}$   $0 < n > 2.$ 

#### SCLUTION:

Il suffit de démontrer: 
$$(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}) \ge (\frac{a}{b} + \frac{b}{a})^2, \text{ où a, } b \in \mathbb{R} \setminus C$$
;

En élevant au carré et en passant tous les termes dans le membre gauche et en faisant les réductions des termes semblables il en

résulte que : 
$$\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} > 0.$$

On note 
$$\frac{a^2}{b^2} = u$$
. On a  $u^2 + \frac{1}{u^2} - u - \frac{1}{u} \ge 0$ .

Ou 
$$\left(u + \frac{1}{u}\right)^2 - \left(u + \frac{1}{u}\right) - 2 \ge 0$$
,  $u = \frac{a^2}{b^2} > 0$ .

On note  $t = u + \frac{1}{u} \geqslant 2$ , on a  $t^2 - t - 2 \geqslant 0$ , c'est-à-dire  $(t+1)(t-2) \geqslant 0$ , inégalité qui est vraie pour  $t \geqslant 2$ .

Donc chaque parenthèse du membre gauche, élevée au carré, est supérieure au égale à la parenthèse correspondante du membre droit; élevée au carré.

et seulement si l'équation  $E(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = t$  admet des solutions entières, où les inconnues sont  $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m, t$ . Cette équation est équivalente à :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i} x_{i} - \sum_{j=1}^{m} b_{j} y_{j} t - bt = -a$$
 (1)

$$(=) \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{j=1}^{m} b_j t_j - bt = -a \text{ avec } t_j = y_j t, j \in \{1, ..., m\}$$
 (2)

#### NECESSITE.

Si cette équation admet des solutions dans  $\mathbb{Z}$ , alors il en résulte que le p.g.c.d. des nombres  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, b$  divise a.

#### SUFFISANCE.

(x) Le cas  $b \neq 0$ . Puisque le p.g.c.d. des nombres  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, b_m, b_m$ , divise b il en résulte que l'équation (2) admet des solutions dans  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = t$ .

(A) Le cos b = 0. Notons  $d_1 = (a_1, ..., a_n)$  et  $d_2 = (b_1, ..., b_m)$ . D'où  $D = (a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m, b) = (d_1, d_2)$  divise a. L'équation (1) devient

(3) 
$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - d_2 \left( \sum_{j=1}^{m} b_j^i y_j \right) \cdot t = -a, \text{ où } b_j = d_2 b_j^i \text{ avec}$$

 $1 \le j \le m$ .

Comme  $(b^i_1, \dots, b^i_m) = 1$ , il en résulte qu'il existe  $(y^o_1, \dots, y^o_m) \in \mathbb{Z}^m$ tel que  $\sum_{j=1}^m b^j y^o_j = 1$ . D'où on a :

(4)  $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - d_2 t = -a \cdot \text{Puisque D} = (d_1, d_2) = (a_1, \dots, a_n, d_2)$ divise a, il en résulte qu'il existe t de \( \text{tel que E} (x\_1, \dots, x\_n, \dots, x\_n, \dots, \do

7.79. Montrer que si 
$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \dots a_n \ (a_i \neq 0, i \in \{1, 2, \dots n\}),$$

alors:
$$a_1 \left( \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) + a_2 \left( \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_n} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1} \right) + \dots + a_n \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} \right) + n = \sum_{i=1}^n a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n$$

#### SOLUTION:

Le membre gauche de l'égalité s'écrit:  $(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_3} + \dots + \frac{a_1}{a_n}) + (\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_2}{a_n} + \dots + \frac{a_2}{a_n} + \frac{a_2}{a_1}) + \dots + (\frac{a_n}{a_1} + \frac{a_n}{a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_{n-1}}) + n = (\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1} + \dots + \frac{a_n}{a_n}) + (\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_2}) + \dots + (\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_n}) + n = \frac{a_1 \dots a_n - a_1}{a_1} + \frac{a_1 \dots a_n - a_2}{a_2} + \dots + \frac{a_1 \dots a_n + a_n}{a_n} + n = \frac{n}{a_1} + \dots + \frac{n}{a_n} + \dots + n = \frac{n}{a_n} + \dots + n =$ 

7.20. Soient les nombres entiers a, b, 
$$a_i$$
,  $b_j$  avec  $i \in \{1, 2, ..., n\}$  et  $j \in \{1, 2, ..., m\}$ . Montrer que si  $x_i$  et  $y_i$  (avec  $i \in \{1, ..., n\}$  et  $j \in \{1, ..., m\}$ ) sont des nombres entiers, l'expression:
$$E(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a}{\sum_{i=1}^{n} b_j y_j + b}$$

a des valeurs entières si et séulement si le plus grand commun diviseur des nombres  $a_1, \dots, a_n$ ,  $b_1 \dots b_m$ , b divise a.

#### SCLUTION:

L'expression  $E(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$  aura des valeurs entières si

7.81. Soit 
$$a_i \in \mathbb{R}$$
,  $i \in \{1, 2, ..., n\}$  et la fonction  $\{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$  définie par  $\{x_i \in \{1, 2, ..., n\}\}$   $\{x_i \in \{1, 2, ..., n\}\}$ 

avec k nombre naturel impair.

Montrer que quelles que soient les valeurs a<sub>1</sub>,...,a<sub>n</sub> la fonction n'a pas le même signe pour tout l'axe réel.

#### SCLUTION:

Soit 
$$m = \min_{i} \left\{ a_{i} \right\}$$

$$M = \max_{i} \left\{ a_{i} \right\}$$

On a m  $\leq$  M (le signe = ne nous dérange pas)

Pour  $x \in (-\infty, m)$  on a  $x - a_i < 0$ ,  $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$  et

 $\frac{k}{\int_{j=1}^{k} (x - a_{ij})} < 0$  parce que k est impair et tous les facteurs du produit sont négatifs.

Donc  $f(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, m)$ De mêm f(x) > 0,  $\forall x \in (M, \infty)$ . Ainsi les signes sont différents et  $\forall a_1, ..., a_n$  en

la fonction est négative et positive à la fois.

7.82. Si les nombres  $\propto_1, \ldots, \propto_n$  sont naturels non nuls, montrer que :

$$1 + \sum_{K=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_K \leq n}^{n} \sim_{i_1} \dots \sim_{i_K} = \prod_{h=1}^{n} (\sim_{h+1}).$$

SCLUTION:  $p_1$ ,  $p_n$ , où  $p_1, \dots, p_n$  sont des nombres premiers distincts deux à deux.

On détermine le nombre des diviseurs positifs D de ce naturel. On sait que  $D = \frac{n}{h} + 1$ .

Puis, on applique une autre méthode pour calculer D: on écrit proprement tous les diviseurs ( K représentera le nombre des facteurs premiers différents, du diviseur d ):  $K = 1. \text{ On a } \times_1 + \dots + \times_n \text{ diviseurs : } p_1^1, \dots, p_1^{-1}, \dots$  $p_n^1, \dots, p_n^n$ K = 2. On a  $\sim$  i<sub>1</sub>  $\sim$  i<sub>2</sub> diviseurs:  $\begin{cases}
p_1 & p_2^1, \dots, p_1 & p_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
 & \searrow_1 & \bowtie_2 \\
p_1 & p_2^1, \dots, p_1 & p_2
\end{cases}$ (Sont  $\bowtie_1 \bowtie_2$  diviseurs)  $\begin{cases}
p_{n-1}p_n^1, \dots, p_{n-1} p_n^n \\
\vdots \\
p_{n-1}p_n^1, \dots, p_{n-1}p_n^n
\end{cases}$ (Son  $x_{n-1} x_n$  diviseurs) K = C. De manière analogue, on a

diviseurs.

Parce que K prend des valeurs de l jusqu'à n, il en résulte que  $D = 1 + \sum_{i < \dots < i_{k} \le n}$  (On a ajouté 1 parce

que, si K = 0 on a le diviseur 1 pour a ).

7.85. Déterminer les nombres naturels de n chiffres tels que l'expression :

 $i_0 = 0$ ,  $i_1$ , ...,  $i_{m-2}$ ,  $i_{m-1} = n$  sont fixés, et que tous les nombres sont écrits en base b.

#### SCLUTION:

Cn note  $\frac{\mathbf{x}_{\mathbf{i}_{h}+1} \quad \mathbf{x}_{\mathbf{i}_{h}+2} \cdots \mathbf{x}_{\mathbf{i}_{h+1}}}{\mathbf{x}_{\mathbf{i}_{h}+1} \quad \mathbf{x}_{\mathbf{i}_{h}+1}} = \mathbf{a}_{\mathbf{h}+1}, \quad 0 \leqslant \mathbf{h} \leqslant \mathbf{m}-1. \text{ Dans ce cas}$ 

le rapport devient :

$$R = \frac{a_1 \cdot b^{n-i_1} + a_2 \cdot b^{n-i_1-i_2} + \dots + a_m}{a_1 + a_2 + \dots + a_m} .$$

Cn pose 
$$c_j = b^n - \sum_{h=1}^{j} i_h$$
,  $1 \le j \le m$ . Donc  $R = \frac{\sum_{m=1}^{m} a_j c_j}{\sum_{j=1}^{m} a_j}$ 

 $= 1 + \frac{\sum_{j=1}^{m} a_{j}(c_{j} - 1)}{\sum_{j=1}^{m} a_{j}}, \text{ qui est maximum lorsque } a_{m} = 0 \text{ (puisque } c_{m} = 1).$ 

• D'où 
$$R_{\text{max}} = 1 + \frac{\sum_{j=1}^{m-1} a_{j} (c_{j} - 1)}{\sum_{j=1}^{m-1} a_{j}} =$$

$$= 1 + (c_{m-1} - 1) + \frac{\sum_{j=1}^{m-1} a_{j} (c_{j} - 1 - c_{m-1} + 1)}{\sum_{j=1}^{m-1} a_{j}} = c_{m-1} + \frac{\sum_{j=1}^{m-2} a_{j} (c_{j} - c_{m-1})}{\sum_{j=1}^{m-1} a_{j}},$$

qui est maximum lorsque a m-1 = 0. Donc

$$R_{max} = c_{m-1} + \frac{\sum_{j=0}^{m-2} a_j (c_j - c_{m-1})}{\sum_{j=0}^{m-2} a_j}$$
 et le procédé continue.

D'après un nombre limité de pas, on a :

$$R_{\text{max}} = c_3 + \frac{a_1 (c_1 - c_3) + a_2 (c_2 - c_3)}{a_1 + a_2} = c_3 + (c_2 - c_3) + \frac{a_1 (c_1 - c_2)}{a_1 + a_2}$$
qui est maximum lorsque  $a_2 = c_3$ . D'où  $R_{\text{max}} = c_2 + \frac{a_1 (c_1 - c_2)}{a_1} = c_1 = b^{n-1}1$ .

Ainsi les nombres cherchés sont :  $\frac{x_1 x_2 \cdots x_i \underbrace{0...0}_{n-i_1}}{}$ écrits en

base b.

7.84. On considère toutes les classes  $C_1$ ,  $C_2$ ,..., $C_K$  de restes modulo m, premiers à m, et  $a_i \in C_i$ ,  $1 \le i \le K$ . Démontrer que  $\forall m \in \mathbb{Z}$  et o  $\le s \le K$ , s impair , on a

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{m} & & & \\ \hline & & & \\ \mathbf{1} \leqslant \mathbf{i_1} \leqslant \dots \leqslant \mathbf{i_s} \leqslant \mathbf{k} \end{array}$$

## Solution :

Evidemment  $K = \mathcal{F}(m)$ , où  $\mathcal{F}$  est l'indicateur d'Euler.

19) m=0 
$$\Rightarrow \varphi$$
 (m)=2  $\Rightarrow s=1$ 

 $C_1 = \left\{-1\right\}$  .  $C_2 = \left\{+1\right\}$  et donc  $a_1 = -1$  ,  $a_2 = +1$  , la somme

S=-1+1=0 ; et o divise 0 .

29) 
$$m=\pm 1 = \Longrightarrow f(m)=0 \pm 1 \pm 1 = 1$$
 S n'importe quel  $S \in \mathbb{Z}$ .

$$3^{\circ}$$
) |. m.  $1 \ge 2$ . Notons  $S_j = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le K} a_{i_1} \cdots a_{i_j} \cdot 1 \le j \le K$ 

(A) Construisons 
$$\int_{i=1}^{K} (x-a_i) = \frac{K}{\int_{j=0}^{K-j} (-1)^{K-j} x^{K-j}} s_j,$$

en prenant S<sub>o</sub>= 1 .

Propriété 1. Si (a.m)=1 , alors (m-a,m)=1 .

Propriété 2. Si  $m \neq \pm 1$ , alors  $\notin (m) \neq 0$ 

( leurs démonstrations sont banales .)

Donc  $K=2K_1$ ,  $K_1 \in \mathbb{Z}$ , et l'ensemble  $\{a_1, \dots, a_{k_1}, a_{k_1}, a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_1}, a_{k_2}, a_{$ 

$$= \left\{ a_{1}, \dots, a_{k_{1}}, -a_{k_{1}}, \dots, -a_{1} \right\} \text{ et}$$

$$(B) : \left\{ (x) = \frac{K_{1}}{1 + 1} \left( (x - a_{1})(x + a_{1}) \right) \pmod{m} \right\}.$$

Si on compare (A) et (B) , on observe que pour s impair,  $0 < s \le k \text{ , on a } (-1)^{k-s} \cdot S_s^{\Xi} \text{ o (mod m) , qui est équivelent à m.} S_s.$ 

(On a utilisé la propriété 3: Si  $a \in C_i$ , alors  $-a \in C_j$ ,  $i_0 \neq j_0$ . Donc l'ensemble  $\left\{a_1, \dots, a_{k_1}, \dots, a_{k_1}, \dots, a_1\right\}$  contient exactement un representant de chacune des  $2K_1$  classes de restes premières à m , m dodulo m .

7.86. Soit 
$$\oint$$
 une permutation sur l'ensemble  $\{1,2,\ldots,n\}$ .

Alors  $\frac{1}{n}$ .

 $h=1$ 

Solution :

Pour la permutation  $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$  on a :

$$\frac{n}{h=1} \left\{ \psi(h) - h \right\} = 2 \left[ (n-1) + (n-3) + (n-5) + \dots \right] = 2 \cdot \frac{\left[ \frac{n}{2} \right]}{k=1}$$

$$(n-2k+4) = 2 \left[ \frac{n}{2} \right] \left( n - \left[ \frac{n}{2} \right] \right) = \frac{n(n-1)}{2} + \left[ \frac{n}{2} \right].$$

Démontrons maintenant par récurrence pour n ∈ ///, n ≥ 2, que la somme  $5 = \frac{n}{2}$   $\left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right)$  prend la valeur maximum

lorsque  $\phi = \psi$ .

Pour n=2 et 3 on le vérifie facilement .

On suppose la propriété vraie pour les valeurs < n+2 . Montrons qu'elle est vraie pour n+2 :

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et pour lesquels S aura la même valeur que pour la permutation-

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ n & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire le maximum ( $\psi$ 's'e t obtenu de  $\psi$  par la réduction de chaque élément par une unité ) conformément à l'hypothèse de récurrence . La permutation de 2 éléments  $\eta=\begin{pmatrix} 1 & n+2 \\ n+2 & 1 \end{pmatrix}$  donne la valeur maximum pour S (conformément à l'hypothèse de récurrence ). Mais  $\psi$  s'obtient justement à partir de  $\psi$ 'et  $\eta$ :

rence ). Mais  $\psi$  s'obtient justement à partir de  $\psi$  et  $\eta$ :  $\psi(h), \text{ si } h \notin \{1, n+2\} ;$   $(h) = \begin{cases} \eta(h), \text{ au contraire } . \end{cases}$ 

7.87 . Soient un nombre entier  $\gg 2$  et  $a_1^{(k)} \in \mathbb{R}$  , où  $i \in \{1,2,\ldots,n\}$  .  $K \in \{1,2,\ldots,m\}$  . Alors :

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sum_{k=1}^{m}a_{i}^{(k)}}{\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}a_{i}^{(k)}}{\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}a_{i}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{2}a_{i}^{(k)}}\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Solution: Tout d'abord on démontre que :

$$\frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} \left( \frac{a_{i}^{(1)} + a_{i}^{(2)}}{a_{i}^{(2)}} \right)^{2} \right) \frac{1}{p} < \left( \frac{n}{n} \left( \frac{a_{i}^{(1)}}{a_{i}^{(2)}} \right)^{2} \right) \frac{1}{p} + \left( \frac{n}{n} \left( \frac{a_{i}^{(2)}}{a_{i}^{(2)}} \right)^{2} \right) \frac{1}{p} .$$

On peut élever à la puissance p cette inégalité car tous les deux membres sont positifs . On a :

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i}^{(1)})^{2} + \sum_{i=1}^{n} (a_{i}^{(2)})^{2} + 2\sum_{i=1}^{n} a_{i}^{(1)} a_{i}^{(2)} \le \sum_{i=1}^{n} (a_{i}^{(1)})^{2} + \sum_{i=1}^{n} (a_{i}^{(2)})^{2} + \sum_{k=1}^{n-1} c_{p}^{k} \propto p^{-k} \beta^{k}, \text{ où}$$

sultant conformément à l'inégélité Cauchy-Buniakouski-Sæhærts.

B) Soit p=2k+1.

a) 
$$x \le \beta$$
. Il en résulte :  $C_p^{k+1} = C_p^{k+1} =$ 

$$\geqslant \overline{2} \cdot \overline{\sum_{i=1}^{a_i^{(1)}} a_i^{(2)}}$$
b)  $\Rightarrow \geqslant \beta$ . Il en résulte :  $C_p^k \Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} C_p^k \Rightarrow C_p^k \Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} C_p^k$ 

 $\frac{1}{1}$  2  $\frac{1}{1}$   $a_1^{(1)}$   $a_1^{(2)}$ . Naintenant de (1), par raisonnement par

l'absurde il en résultera le problème .

Le cas :m=2 a été vérifié .

Supposons la propriété vraie pour les valeurs < m . Montrons

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\sum_{k=1}^{m}a_{i}^{(k)}}{\sum_{k=1}^{m}a_{i}^{(k)}}\right)^{2}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i}^{(i)}\right)_{i}^{+}\sum_{k=2}^{m}a_{i}^{(k)}}{\sum_{k=2}^{m}a_{i}^{(k)}}\right)^{2}\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(1)})^2}{\sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=2}^{m} a_i^{(k)}\right)^2\right)^{\frac{1}{p}}} \leq$$

( conformément à:1°hypothèse de récurrence )

7.88. Démontrer l'inégalité :  $n! > 2 - 1 \cdot \left( \frac{n-1}{2} \right) \cdot \left( \frac{n}{2} \right) \cdot$ 

#### Solution:

a) ng 2k

=) 
$$n! = (2.4.5...2k) \cdot [1.3.5...(2k-1)] = 2^{k} \cdot [1.2.3...k) \cdot [1.3.5...(2k-1)] = 2.K \cdot [1.3.5...(2k-1)] > 2^{k} \cdot k \cdot [2^{k-1} \cdot (k-1)! = 2^{2k-1} \cdot (k-1)! \cdot k!$$

De ces deux situations il s'ensuit que :

$$n! > 2^{n-1} \cdot \left[ \frac{n-1}{2} \right] \cdot \left[ \frac{n}{2} \right] \cdot \left[ \frac{n}{2}$$

7,89.Démontrer l'inégalité :

$$\frac{1}{1=0} \frac{2^{\frac{1}{2}-1}}{1=0} \frac{2^{\frac{1}{2}-1}}{1=0} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}-1}} -1$$

$$\frac{2^{\frac{1}{2}-1}}{1=0} \frac{2^{\frac{1}{2}-1}}{1=0} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}-1}} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}-1}$$

## Solution &

$$(1) \quad n! > 2^{n-1} \cdot \left[ \frac{n}{2} \right] \cdot \left[ \frac{n-1}{2} \right] !$$
 (voir le problème antérieur) On peut facilement démontrer que

$$(3) \qquad \left[ \frac{n-a}{2^p} \right]^{-1} = \left[ \frac{n-a-2^p}{2^{p+1}} \right] \quad \text{a vec } 0 \leq a \leq 2^p \quad \text{a } \in /K/.$$

(Pour cela on poss n=2 p+1. K+1, avec  $K\in M$  et  $0\le x\le 2^{p+1}$ .) Ensuite on utilise la réquirer e pour démontrer l'inégalité de l'énoncé . On considère cette inégalité comme une proposition mathématique qui dépand de m , donc P (m) . On applique la récurrence sur m .

Pour m=o on obtient l'inégalité (1) qui est vraie. On suppose que P (m) est vraie . On va démontret que P (m+1) est vraie.

Tout d'abord , da (1) 2(2) et(3) il résulte que :

(4) si 
$$0 \le h < 2^{m-1}$$
 alors  $\left[\frac{n-h}{2^{m+1}}\right] > 2^{\frac{n-h}{2^{m+1}}} - 1$ .

Pour chaque h naturel , o  $\leqslant$  h < 2  $^{n-1}$  , on reporte (4) dans P(m) , et puis on effectue tous les calculs .

On trouve justement la proposition P ( m+1 ).

Remarque: Pour généraliser cette inégalité on remplace 2 par un naturel quelconque p , 2 < p < n , et on suit une méthode analogue de résolution . On va trouver un résultat d'écriture plus compliqué , et l'inégalité sera moins fine .

Démontrer que

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a^{ij} + \prod_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{k} a^{ij} - \sum_{j=k+1}^{m} a^{ij} \right) \leq m^{n} + (2k-m)^{n},$$

où K est un nombre nature1 < m.

#### Solution :

On note 
$$P_1 = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a^{j}_{ij} = \prod_{i=1}^{n} (a^{p_{ij}}_{ij} + a^{p_{i2}}_{i2} + ... + a^{p_{inj}}_{im}) =$$

$$=\left(a_{11}^{P_{11}}+a_{12}^{P_{12}}+...+a_{1m}^{P_{1m}}\right)...\left(a_{n_1}^{P_{n_1}}+a_{n_2}^{P_{n_2}}+...+a_{n_m}^{P_{n_m}}\right).$$

Si on fait toutes les multiplications, on voit que  $P_1$  est une somme algébrique qui contient  $m^n$  termes et chacun d'eux a le signe + . On note  $P_2 = \prod_{i=1}^{K} \left( \sum_{j=1}^{K} a_{ij}^{kj} - \sum_{j=K+1}^{m} a_{ij}^{kj} \right) = \prod_{i=1}^{m} \left( a_{i1}^{ki} + \ldots + a_{iK}^{ki} - a_{iK+1}^{ki} - \ldots - a_{im}^{km} \right) \cdots \left( a_{ij}^{kn} + \ldots + a_{iK}^{nK} - a_{iK+1}^{nK} - \ldots - a_{iK+1}^{nK} - \ldots$ 

Aussi , lorsqu'on fait toutes les multiplications on obtient une somme algébrique qui contient m termes , les uns ont le signe + , les autres - . Les termes de  $P_2$  sont égaux deux à deux aux termes de  $P_1$  en valeur absolue. Notons  $P=P_++P_2$  .

En P se réduirons tous les termes négatifs de  $P_2$ , puisqu'ils ont un correspondant positif chacun. (Les termes nuls qui ont le gigne – de  $P_2$  seront " réduits " avec les termes nuls qui ont le signe + de  $P_1$  et qui ont la même valeur absolue.

Donc , sans nuire à la généralité , on considère les termes nuls de  $P_1$  et  $P_2$  comme positifs ou négétifs , en fonction du signe + ou - qui se trouve en face d'eux .)

Ainsi, P sera égal à deux fois la somme de tous les termes positifs de  $P_2$ . Un terme positif de  $P_2$  est de la forme suivante : a  $P_1$  ... a  $P_m$  ... a  $P_m$ 

inférieur ou égal à deux fois le nombre de termes positifs de  $P_2$  ( l'égalité sera vraie lorsque tous  $a_{ij} = 1$  ).

Soit la suite  $b_1 = K_* b_{n+1} = (2 K-m) \cdot b_n + (m-K) m^n$ .

Par raisonnement par récurrence on montre que  $\mathbf{b_n}$  salcule justement le nombre de termes positifs de  $\mathbf{P_2}$  .

Parcequ'on s'intéresse seulement au signe des termes , convenons de désigner par + un terme positif , et par - un terme négatif.

Le cas n=1 implique  $P_2 = (+ \cdots + - \cdots -)$ , donc le

nombre des termes positifs est K et  $b_1 = K$ . On suppose la propriété vraie pour n , on va la démontrer pour n+1 . Pour n , on a :  $P_2^{(n)} = \begin{pmatrix} + & \cdots & + & - & \cdots & - \\ & & & & m^n & -b_n \end{pmatrix}$  , où  $b_n$  représente le nom-

bre des termes positifs de  $P_2^{(n)}$ . Pour n+1 on a  $P_2^{(n+1)} = (\underbrace{+ \cdot \cdot \cdot +}_{bn})$ 

Le nombre des termes positifs , dans ce cas , sera :

$$K - b_n + (m-K) (m^n - b_n) = (K-m+K) b_n + (m-K) b_n^n = (2K-m)b_n^{-1}$$

+ ( m-K )  $m^n = b_{n+1}$  . Mais  $b_n$  est une suite linéaire récurrente et homogène .

D'où il résulte que  $b_n = \frac{1}{2}(m^n + (2K-m)^n)$ , donc  $P \le m^n + (2K-m)^n$ .

7.91 . Soit un polynôme P (x) de degré r < n-1 qui pour les nombres distincts  $x_1$  , ... , x prend les valeurs  $y_1$  , ... ,  $y_n$  . Pour

 $1 \leqslant i \leqslant$  n on considère les équations

$$x^{n-1} - s_{i,1} x^{n-2} + s_{i,2} x^{n-3} + \dots + (-1)^{n-1} s_{i,n-1} = 0$$

qui admettent les racines  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ . Alors

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} y_{i} \quad s_{i,h} \quad \frac{n}{\sum_{\substack{j=1 \ j \neq i}}^{n}} \quad \frac{1}{x_{i} - x_{j}} \quad o \text{, avec o } \leqslant h \leqslant n-r-2 \text{,}$$

où par convention on a noté S<sub>i,0</sub> = 1 .

#### Solution :

Le polynône qui , pour les nombres distincts  $x_1, \dots, x_n$  prend les valeurs , respectivement ,  $y_1$  , ...,  $y_n$  est :

$$P (x) = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}$$

+...+ 
$$y_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

et c'est celui de plus petit degré ayant cette propriété ( d'après Lagrange ).

Degré P (x) = r<n-1 . Cela implique que les coefficients de  $x^{n-1},\;x^{n-2},\ldots,x^{r+1}\;\text{sont nuls . Nais les coefficients de }x^k,\;\text{avec}$   $r+1\leqslant k\leqslant n-1\;,\;\text{sont exactement les expressions :}$ 

$$(-1)^{n-K-1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} y_i \leq \sum_{i,n-K-1}^{i} \frac{1}{j \neq i} = \frac{1}{x_i - x_j}}.$$

Loreque  $r+1 \le K \le n-1$ , on a  $0 \le n-K-1 \le n-r-2$  et on note h=n-K-1.  $S_{1,h}$  est la somme de tous les produits de h facteurs (  $h \ne 0$  ) chacuh, qui se forment avec les nombres  $x_1$ , ...,  $x_{i-1}, x_i, \dots, x_n$  ( c'est-à-dire la somme h-ième de relations de Viète , appliquées à l'éguation de l'énoncé ).

7.92. Soit le polynôme à coefficients entiers  $P(x) = \frac{n}{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}$ .

Montrer que pour p,  $q \in \overline{\mathcal{H}}$ , si  $P(\frac{p}{q}) \neq 0$ , alors  $|P(\frac{p}{q})| > \frac{1}{|9^m|}$ ,  $m \geq n$ .

# Solution:

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = \left| a_{n}p^{n} + a_{n-1} p^{n-1}q^{n} + \dots + a_{1}p^{1} q^{n-1} + a_{0}q^{n} \right| \cdot \frac{1}{|q^{n}|} \ge$$

$$\geqslant \frac{1}{||\mathbf{q}^{m}||} \cdot ||\mathbf{a}_{n}||^{p^{n} + a_{n-1}p^{n-1}q} + \cdots + |\mathbf{a}_{1}||^{p^{n}q} + ||\mathbf{a}_{0}||^{q^{m}q} > \frac{1}{||\mathbf{q}^{m}||}$$

parce que :

$$\begin{array}{c} m \geqslant n \text{ implique que} \quad \frac{1}{|q^n|} \geqslant \frac{1}{|q^m|} \\ \text{et } a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p^1 q^{n-1} + a_0 q^n \in \mathbb{Z} \setminus \left\{o\right\} \text{ et sa} \\ \text{valeur absolue est } \geqslant 1 \text{ .} \end{array}$$

7.93 . Montrer que

$$\sum_{\substack{\mathbf{s_4} + \dots + \mathbf{s_5} = \mathbf{k}}} C_{\mathbf{n_1}}^{\mathbf{s_4}} C_{\mathbf{n_2}}^{\mathbf{s_2}} \cdots C_{\mathbf{n_k}}^{\mathbf{s_k}} = C_{\mathbf{n_1}}^{\mathbf{k}} + \dots + \mathbf{n_p}$$

## Solution :

On a

$$(1+x)^{n_1}(1+x)^{n_2} \cdot \dots \cdot (1+x)^{n_p} = (1+x)^{n_1'+\dots+\epsilon p_p} \cdot$$
 Le coefficient de  $x^k$  dans le membre droit est  $C \frac{k}{n_1+\dots+n_p} \cdot$  Le coefficient de  $x^k$  dans le membre gauche est

$$\sum_{n_{1} + \cdots + s_{p} = k}^{s_{1}} c_{n_{2}}^{s_{2}} \cdots c_{n_{p}}^{s_{p}}.$$

Des deux observations il résulte l'égalité .

7.94 . Soient k , m , 
$$n \in //(/^n \cdot p \in //(/ \text{ et a}_j \in () \cdot j = 1, m \cdot n)$$
Si  $a_j^{2kn} + a_j^{(2k-1)n} + \cdots + a_j^{n} + 1 = 0$  pour  $j = 1, m$ ,

calculer:

$$E(a_1, \dots, a_m) = (a_1 \dots a_n, p \cdot n + 1 + (a_1 \dots a_m)^{pn} + (a_1 \dots a_m)^{pn}$$

#### Solution :

On note  $a_j^n = y_j$ , j = 1,m. Puisque  $y_j \neq 1$ , en multipliant chaque égalité de l'énoncé , respectivement , par  $y_j = 1$  on obtient: 2k-1 2k-1 2k+1 2k+1

Donc, quel que soit  $j \in \overline{1,m}$  on a  $y_j = \cos \frac{\overline{1,m}}{2k+4} + i \sin \frac{\overline{p}}{2k+1}$ 

 $P_{j} = 1, 2, ..., 2 k$ 

On va démontrer par récurrence en fonction de m  $\in \mathbb{Z}(/^{\bullet}$  , que :

E  $(a_1, \dots, a_m) = (a_1^{pn} + \frac{1}{a_1^{pn}}) \dots (a_m^{pn} + \frac{1}{a_m^{pn}}).$ 

Pour m = 1 on a E (a<sub>1</sub>) = a  $\frac{pn}{1} + \frac{1}{a pn}$ . Supposons la pro

priété vraie pour m , il faut démonterr , pour m+1 , que

 $E(a_1, \dots, a_m, a_{m+1}) = E(a_1, \dots, a_m) \cdot (a_{m+1}^{pn} + \frac{1}{a_{m+1}^{pn}}).$ 

Donc E (  $a_1$  , ...,  $a_m$  ) = 2 m cos  $\frac{P_1 \tilde{I}}{2 k+1}$  p... cos  $\frac{P_m \tilde{I}}{2 k+1}$  p.

 $(P_1, ..., P_m) \in \{1, 2, ..., 2k\}^m$ .

7.95 . Dans un plan on considère l'ensemble des points dont les coordonnées sont des entiers . Soient les naturels n.m.p avec p >> 4 . Montrer qu'il existe un polygone de p côtés qui ait n points sur sa frontière et m points à l'intérieur.

Généraliser dans l'espace .

#### Solution :

La démontration se fait par construction .

On peut dessiner les segments (AA')

'et [BB'] ( voir la figure ci-contre )

tels qu'ils ne passent par aucun point , et tels que A' , B' se

trouvent entre la ligne de CD et la ligne située au-dessus de

celle-ci ; et le segment [CD]; ( c'est-à-dire les m points )

se trouve dans l'intérieur du quadrilatère AA'B'B.

 $p > 4 \longrightarrow p - 3 > 1$ . Parceque le polygone a p côtés , on unit les points A' et B' par une ligne polygonale qui contient p-3 côtés et qui est située entre la ligne de CD et la ligne supérieure à celle-ci , sans toucher aucun point . Généralisation .

Dans l'espace ecclidien  $//\sim$ , on considère l'ensemble des points dont les coordonnées sont entières. Si n.m.p sont naturels , p  $\gg$  5 , alors il existe un polyèdre de p faces qui contient n points sur co frontière et m points à l'intérieur.

La démonstration se fait aussi par construction : on considère les segments [AB] et [CD] avec leurs propriétés antérieures , mais ([AA]) et [DB] sont remplacés par des plans qui gardent les mêmes propriétés . Puis on construit deux plans qui pacient par les plans antérieurs, en gardant bien sûr les conditions demandées.

A la fin , la ligne polygonal A'B' sera remplacée par une chaîne de p-4 plans qui se construisent de façon analogue .

7.96 . Déterminer l'ensemble A défini par :

- a) 102 ∈ A;
- b) si  $x \in A$ , alors  $\tilde{1} \times 2 \in A$ ;
- c) les éléments de A s'obtiennent seulement par l'utilisation des règles a) et b) un nombre limité de fois .

#### Solution :

Montrons que 
$$A = M$$
, où  $M = \left\{ \frac{1 \cdot \cdot \cdot 1}{n} \text{ o } \frac{2 \cdot \cdot \cdot 2}{n} / n \in \mathbb{Z} \right\}$ 

Tout d'abord , montrons que  $A\supset M$  .

On utilise le raisonnement par récurrence pour n $\in \mathbb{M}/^*$  .pour montrer que 1... 1, o 2... 2 E A . Pour n=1 on a 102 E A d'après

la règle a). On suppose la propriété vraie pour n , alors  $\underbrace{1 \dots 1}_{n}$  o  $\underbrace{2 \dots 2}_{n} \in A$  et il en résulte qu'aussi

$$\frac{1 \cdot \cdot \cdot 1 \quad 0 \quad 2 \cdot \cdot \cdot 2 \quad 2 \in A \quad d \text{ après la règle b })}{n}$$

Montrons que ACM.

Soit x∈A . Si on applique seulement la règle a} il en résulte que x = 102 ∈ M . On ne peut appliquer la règle a) qu'une fois . Maintenant la règle b) ne peut s'appliquer que si la règle a) a été appliquée . Si on applique b) une seule fois , on obtient x = 11022 . Par récurrence on démontre que si on applique la règle b) n fois ; alors

$$x = \underbrace{1 \dots 1}_{n+1} \text{ o } \underbrace{2 \dots 2}_{n+1} \in A \text{ . Mais } \underbrace{1 \dots 1}_{n+1} \text{ o } \underbrace{2 \dots 2}_{n+1} \in M.$$

Donc ACM, d'où A = M.

7.97 . On construit l'ensemble B tel que :

- a) les éléments 0,9 et 1 appartiennent à 5 ;
- b) si x,y \in B , alors | x-y| et xy \in B ;
- c) tout élément de B s'obtient par l'utilisation des règles
- a) et b) un nombre limité de fois .

Trouver B .

#### Solution :

Démontrons que B = M , où

$$M = \{ \overline{0, x_1 \cdots x_p} \mid 0 \leq x_i \leq 9, i \in \{1, \dots, p\} , p \in \mathbb{N}(/^{\bullet}, \dots, p) \}$$

$$p < +\infty \} \left( \cdot \right) \left( (1) \right) \cdot$$

Tout d'abord montrons que ((0; 0;1; 0,2;...0,9; 1)

$$0.9 \text{ et } 0.9 \in B \implies | 0.9 - 0.9| = 0 \in B$$
;

$$0.9 \text{ et } 1 \in B \Rightarrow 1'0.9-11. = 0.1 \in B;$$

$$0.9 \text{ et } 0.1 \le B \Rightarrow 1.0.9 - 0.1 = 0.8 \le B;$$

$$0.8 \text{ et } 0.1 \in B \implies 0.8-0.1 = 0.7 \in B;$$

0,3 et 0,1  $\in$  B  $\Rightarrow$  1,0,3-0,11 = 0,2  $\in$  B;

Si 
$$y \in \{0,1,2,...,9\}$$
 alors  $0,0...0$   $y = 0,1...0,1...0,y \in B$ ,

puisque s'obtient par l'utilisation des règles a) et b). Soit  $x \in M$ ; si x=1 on a  $1 \in B$  par la règle a); si  $x \neq 1$  on a  $0 \le x < 1$ ; si x=0 on a  $0 \in B$ . Il reste done le cas  $x=0,x_1\cdots x_p$ 

avec o  $\leq x_i \leq 9$ , i  $\in \{1, \ldots, p\}$ ,  $P \in \mathbb{Z}/^*$ ,  $p < +\infty$  et  $x \pm o$ ; sans nuire la généralité on suppose  $x_p \neq 0$ .

$$x_1 \neq 9$$
, alors  $\overline{0, x_1 \cdot \cdot \cdot x_p} = \overline{0, w_1} - \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0 \cdot \cdot \cdot 0} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0y_2} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0y_2} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0y_2} = \overline{0, 0y_2} - \cdots - \overline{0, 0y_$ 

Bien sûr  $1 \le w_1 \le 9$  puisque  $0 \le x_1 \le 8$ ; on a  $0 \le y_j \le 9$ ,  $2 \le j \le p-1$  puisque  $0 \le x_j \le 9$ ,  $2 \le j \le p-1$ ;  $1 \le z_p \le 9$  puisque  $1 \le x_p \le 9$ . On a:  $0 \cdot w_1 - (0 \cdot 0 \cdot y_2 + 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot y_3 + \cdots + 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot y_{p-1} + 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot z_p) = 0 \cdot w_1 - 0 \cdot 0 \cdot y_{p-1} z_p$ . Effectuons la soustraction:

$$0.00 - 0.00$$

 $= \overline{{}_{0,x_{1}x_{2}\cdots x_{p-1}} x_{p}}.$ 

parce que  $10-z_p = x_p$ ,  $w_1-1=x_1$  et  $9-y_j = x_j$ ,  $2 \le j \le p-1$ .  $\overline{o,w_1}$  et  $\overline{o,oy_2} \in B \Longrightarrow 1, \overline{o,w_1} - \overline{o,oy_2}1. \in B$ 

mais la dernière valeur absolue est égale à o,w1-0,0y2-0,00y3 .

Par récurrence il en résulte que  $x \in B$  , puisque :

$$x = 0, w_1 - 0, 0y_2 - \dots - 0, 0 \dots 0, y_{p-1} - 0, 0 \dots 0, z_p = 0$$

qui s'obtient par l'utilisation des règles à) et b) un nombre limité de fois .

β) si 
$$x_1 = 9$$
, on a 0,9...9 = 11-0,0...0 11,  $\in B$ ;  $\forall n \in M/^*$ .

 $x=\overline{0.9x_2...x_p}=\ \ 10.9...9-\overline{0.0t_2...t_p}\ \ .ou\ t_j=9-x_j...2 \le j \le p\ ;$   $0 \le t_j \le 9 \text{ puisque } 0 \le x_j \le 9 \text{ pour } 2 \le j \le p\ .$ 

Pour montrer que  $t = \overline{0,0t_2...t_p} \in D$ ,  $0 \le t_j \le 9$ ,  $2 \le j \le p$ , il

suffit de voir que le premier chiffre décimal de t est zéro, donc différent de 9, donc on utilise le cas << ).

$$t \in B \Rightarrow x \in B$$
.

o,9 et 1 (0,1); (0;0,1;0,2;...;0,9;1) (M . Les opérations de la règle b) effectuées un nombre limité de fois sur les éléments o,9 et 1 vont donner aussi des éléments de M, parce que:si

7.98. Soit l'ensemble 
$$I = \left\{ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} | (a,b) \in \mathbb{Z}, b \neq 0, (b,m) = 1 \right\}$$

qui s'appelle l'anneau des m-entiers , m $\in \mathbb{Z}$  , fixé.

On dit que x = y ( mod m ) dans I , avec x,y de I ,si et seule-ment s'il existe z  $\in$  I tel que x-y= m.z.

On considére l'élement r de I ; trouver se classe d'équivalence modulo m dans I .

Solution . 1) Le cas  $r \in \mathbb{Z}$  . a)  $m \notin \{-1,0,1\}$  on note  $\hat{r}$  la classe cherchée.  $M_m$  l'ensemble  $m \mathbb{Z}$  , et

$$k_1 = \frac{\int \frac{mk_1 + h}{mk_2 + p}}{\int k_1 \cdot k_2 \cdot h \cdot p \in \mathbb{Z}}, o \leq h \cdot p < 1/m, l(m,p) = 1 \text{ et}$$

h-predm.

Montrons que  $\hat{r} = M$ .

Tout d'abord montrons que r \_ M.

Soit  $x \in M$ . Alors il existe  $k_1, k_2$ , h,  $p \in \mathbb{Z}$  avec les propriétés écrites ci-dessus .

1º)  $x \in I$ , c'est-à-dire x est un m- entier , parceque de (m,p)=1 et  $k_2 \in \mathbb{Z}$  il résulte que (  $mk_2$  + p,m ) = 1.

2º) x= r ( mod m ) dans I , puisqu'il existe  $\frac{1}{2}$ 

 $X_1 = k_1 - rk_2 + \frac{h_1 - rk_2}{m}$  ( $X_1 \in \mathbb{Z}$  parce que h-rp =  $M_h$ ) et

 $\delta_2 = mk_2 + p$  (donc  $\frac{\delta_1}{\delta_2}$  est un m-entier parce que ( $\delta_2$ , m)=1);

tel que :

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{mk_1 + h - mk_2 r - rp}{mk_2 + p} = x - r \cdot Dogc \quad x \in \hat{r}$$

Montrons que r C M.

Soit  $x \in r$ . Donc  $x = \frac{a}{b}$  et  $b \neq o$ , (b,m) = 1, ainsi que x = r(mod m) dans I . Mais b peut s'écrire  $b = mk_2 + p$ ,  $o et de même <math>a = mk_1 + h$ ,  $o < h < limits m. | . avec <math>k_1$ ,  $k_2$ , h, p dans Z.

 $x = r \pmod{m}$  dans I, implique que m x-r dans I, donc implique qu'il existe x = x-r, et  $(x_2,m)=1$ .

Considérons & irréductible . Il en résulte .

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1 - x_2 \cdot r + h - pr}{m(mk_2 + p)}$$
 . Parce que  $(x_1, x_2) = 1$  et

 $(x_2, m) = 1$  il vient :  $m \mid m(k_1 - k_2 r) + h - pr \cdot d'où m/h - rp$ . c'est à dire  $x \in M$ .

Remarque 1 . Pour m=o on a  $I=\mathbb{Z}$ , et pour m=+ 1 on a I=0 .

- b) m=o . Chaque classe d'équivalence contient seulement un élément donc  $\hat{r} = \hat{1} \hat{r}$  .
- c) m =  $\pm$  1 . Il existe une seule classe d'équivalence , donc  $\hat{r}$  = I =  $\langle \hat{r} \rangle$  .
  - 2) Le cas r ∈ I-7 . a) m = ('-1,0,1) .

Propiniété 1 .

 $x_0 \cdot r_2 + y_0 = r_1$ 

Soient  $m \in \mathbb{Z}$ , I l'anneau des m-entiers et  $\frac{r_1}{r_2} \in \mathbb{I}$ .

Alors  $\frac{1}{1}$  a  $\in \mathbb{Z}$  tel que  $\frac{r_1}{r_2}$  a ( mod m ) dans I.

Démonstration  $\frac{r_1}{r_2} \in I \implies (r_2, m) = 1, \text{ et } r_1, r_2 \in Z$ .

Soit l'équation diophantienne :  $xr_2 + ym = r_1$  (les inconnues étant x et y ) qui admet des solutions entières , puisque  $(r_2 \cdot m) = 1$  et  $1 \mid r_1$  . Soient  $x = x_0 \in \mathbb{Z}$  et  $y = y_0 \in \mathbb{Z}$  une solution particulière . On prend  $a = x_0$  et  $x = x_0 \cdot n$  a :  $x = x_0 \cdot n$ 

$$\frac{x_0 \pmod{m} \text{ puisque m}}{y_0} \left(\frac{r_1}{r_2} - x_0\right) \text{ parce qu'il existe}} = \frac{y_0}{y_0} - \frac{y_0}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} - x_0 \cdot \text{Donc}$$

Remarque 2 . Il existe une infinité d'entiers  $\propto$   $\in$  I tels que  $r_1 = \propto$  ( mod m ) dans I , evec m  $\neq$  o .  $r_2$ 

Ces nombres sont , par exemple , des solutions particulières de l'équation diophantienne antérieure .

Donc , pour  $r \in I-\mathbb{Z}$  ,  $\exists$   $a \in \mathbb{Z}$ , tel que  $r \equiv a_r$  ( mod m ) dans I et  $r = a_r$  qui se détermine comme dans I cas 1 a).

- b) Le sous-cas m=o n'existe pas parce qu'il résulterait  $I=\mathbb{Z}$  et donc  $r \in \mathbb{Z}$  .
  - c) m=+ 1 . On a r= I =

7.99. On considère l'équation :  $a_1x_1^{m_1} + \dots + a_m^{m_n} = b$ , avec  $a_i, m_i \in \mathbb{Z}$ . Montrer que l'équation a un nombre limité de solutions naturelles.

#### Solution :

a) b > 0. On note tous  $x_i^{m_i} = y_i$ . L'équation initiale devient  $a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n = b$  (1)

On voit que :

$$o \leq y_1 \leq \left\lfloor \frac{b}{a_1} \right\rfloor$$
 ( sinon on a :  $a_1y_1 > b$  )

$$o \le y_n \le \frac{b}{a_n}$$
 ( même explication ).

Il en résulte que :  $0 \le le$  nombre des solutions naturelles de l'équation (1)  $\le \frac{n}{1+\left\lfloor \frac{b}{a_1}\right\rfloor}$  = M = nombre fini.

$$x_{i} = \sqrt{y_{i}}, i \in \{1, \dots, n\}.$$
 (2)

Ainsi , si le nombre des solutions de l'équation (1) est limité , alors aussi , de (2) il va résulter qu'il existe un nombre dimité de valeurs pour chaque  $\mathbf{x}_i$  .

- b=o . Alors , la seule solution naturelle est la solution triviale .
- %) b < o . L'équation n'admet aucune solution naturelle .

7.100. Soient  $a_i$ , b > 0 pour  $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ . Alors, l'équation :  $a_1^{\times} + \cdots + a_n^{\times} = b^{\times}$ , n > 2, admet au plus une solution dans l'ensemble des nombres réels.

#### Solution : '

L'équation peut n'avoir aucune solution , ou bien elle peut avoir au moins une solution .

Si l'équation admet au moins une solution , soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  l'une de celles-ci . Donc  $a_1^{x_0} + \ldots + a_n^{x_0} = b$ 

1)  $x_0 > 0$ . Soit  $x > x_0$ . It an résulte que  $x = x_0 + t$  avec t > 0. Soit  $z = \max\{a_1, \dots, a_n\}$ 

$$a_1^{x} + \dots + a_n^{x} = a_1^{t} a_1^{x_0} + \dots + a_n^{t} a_n^{x_0} \le Z^{t} (a_1^{x_0} + \dots + a_n^{x_0}) = Z^{t} \cdot b^{x_0}$$

Si 
$$z \geqslant b \Rightarrow z \stackrel{\times_0}{>} b \stackrel{\times_0}{=} a_1^{\times_0} + \cdots + a_n^{\times_0} > b^{\times_0} \cdot D^{\bullet}où$$
  
 $z < b \cdot Ainsi que a_1^{\times} + \cdots + a_n^{\times} < b^{\times}, \forall x > x$ 

-Soit  $x < x_0$ . Il en résulte que  $x = x_0 - t$  avec t > 0 .

$$a_1^{x} + \cdots + a_n^{x} = a_1^{-t} a_1^{x_0} + \cdots + a_n^{x_n} a_n^{x_n} > Z^{-t} (a_1^{x_0} + \cdots + a_n^{x_n}) = \overline{Z} \cdot b_n^{x_n}$$

Puisque  $Z < b \implies Z^{-t} > b^{-t}$ . Ainsi  $a_1^X + \cdots + a_n^X > b^X$ .  $\forall x < x_0$ . d'où,  $\Rightarrow x_0$  est la scule solution de l'équation .

2) 
$$x_{0} < 0$$
. On a:
$$x_{0} = x_{0} + \dots + x_{n} = x_{0} = x_{0}, \text{ ou} \left( \frac{1}{a_{1}} \right)^{-x_{0}} + \dots + \left( \frac{1}{a_{n}} \right)^{-x_{0}} = \left( \frac{1}{b} \right)^{-x_{0}}.$$

avec  $-x_0 > 0$ , donc on a réduit ce cas au premier cas .

3) Le cas x = o n'est pas possible puisqu'il en résulterait:

 $a_1^0 + \cdots + a_n^0 = b^0$ , ou n=1 , mais par hypothèse  $n \ge 2$  . Contradiction •

7.101. Montrer qu'une congruence modulo m;m = o qui contient des inconnues , admet un nombre limité de solutions distinctes ( non congrues deux à deux ).

# Solution : Factor to the contract of the con-

Chaque inconnue ne peut prendre que les valeurs : 0,1,2,...

...; [m] -1 c'est-à-dire au maximum | m]. valeurs (un système complet de restes modulo | m, |) . Si l'équation - congruence contient n inconnues , alors le nombre maximum de solutions sera | m, 1 < >...

Observation: Lorsque m = o , la congruence devient une égalité ( une équation ) qui peut avoir une infinité de solutions , par exemple o x = o ( mod o ) .

7.102 . Résoudre la congruence linéaire  $2x-1 = 1-6y \pmod{4}$ .

## Solution :

La congruence s'écrit :  $2x+6y-2 \equiv o \pmod{4}$  .D'où 2x+6y-2=4K avec  $K \subseteq 7$  . Ou x+3y-2K-1 = o .

(Remarque: on ne peut pas divisor la congruence par 2 au début ( on obtiendrait x+3y≡o (mod2). ),parce qu'on perd des solutions) Le module de la congrunce reste 4 . On a :

x=-3y+2k+1. Donc  $x=-3y+2k+1 \pmod{4}$ , ou  $x=y+2k+1 \pmod{4}$ .

On prend  $(y,k) \in \{0,1,2,3\}^2$ , donc toutes les possibilités.

Mais il suffit de donner à K les valeurs o et 1 , puisque :
pour k=3 == 2 2 ( mod 4) et pour k=2 2 2 6 (mod 4).

Si on donne succe givement les valeurs (0,0),(1,0),(2.0), (3,0),(0,1),(1,1),(2,1),(3,1) au couple (y,k) on obtient pour x, respectivement les valeurs 1,2,3,0,3,0,1,2. Mais k ne nous interesse pas . Donc :

On sait que le nombre des solutions de cette congruence est égal à (2,5):4 =8 .

7.103. Soient  $a_i \in \mathbb{Z}$ ,  $i \in \{1,2,...,n\}$ ,  $n \ge 2$  et  $b \in \mathbb{Z}$ . Montrer que l'équation  $\sum_{i=1}^{n} a_i \times_i = b \text{ admet une infinité de solutions}$ 

dans l'ensemble des nombres naturels si et seulement si  $(a_1, \dots, a_n)$  divise b et s'il existe  $(i_0, j_0) \in \{1, \dots, n\}^2$  tels que  $a_1 \cdot a_2 < 0$ .

(On note (a<sub>1</sub>,...a<sub>n</sub>) le plus grand commun diviseur de a<sub>1</sub>,a<sub>2</sub>,...a<sub>n</sub>).

#### Solution:

Si on met les coefficients de l'équation au même dénominateur on peut éliminer les dénominateurs et donc on peut dire que tous les a et b sont entiers .

#### Nécessité 。

Il en résulte que ( a<sub>1</sub>...,a<sub>n</sub>) divise b , d'après un théorème connu.

On suppose par l'absurde que tous les termes de l'équation ont le même signe , par exemple positif ( dans le cas contraire on multiplie l'équation par -1 );

-si b < o alors l'équation n'a aucune solution naturelle ; contradiction .

-si b> o , chaque inconnue  $x_i$  ne peut prendre des valeurs qu'entre o et  $\left\lceil \frac{b}{a_i} \right\rceil$  ( des valeurs naturelles ), donc un nombre fini de solutions ; contradiction aussi . D'où la supposition est fausse , donc il n'est pas vrai que les termes de l'équation ont le même signe .

#### Suffisance .

Comme (  $a_1,\dots,a_n$ ) divise b il en résulte que l'équation a des solutions dans  $\mathbb{Z}^n$ . Par hypothèse , l'équation a { termes positifs non nuls ,  $1 \le \ell < n$  , et k=n- $\ell$  termes négatifs non nuls . On a  $1 \le k < n-1 < n$  . Alors on écrit :

$$\frac{\frac{i!}{n!}}{\sum_{h=1}^{n} a_h \cdot x_h} - \sum_{j=i+1}^{n} a_j^* x_j = b \cdot où o < a_j^* = -a_j^*$$

$$j \in \{\ell, +1, \ldots, n\}$$
.

(On a supposé les épremiers termes positifs et les k suivants négatifs . Dans les autres cas réordonne les termes et (implicitement ) on les renumérote .)

Soit  $0 < M = \begin{bmatrix} a_1, \dots, a_n \end{bmatrix}$  le plus petit commun multiple de  $a_1, \dots, a_n$ . On note  $c_i = \lfloor M/a_i \rfloor$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Soit encore  $0 < P = [f_1, k]$  le plus petit commun multiple de  $\ell$  et k . On note  $\ell_1 = P/\ell$  et  $k_1 = P/k$  .

Si on pose 
$$\begin{cases} x_h = x_1 \cdot c_h \cdot t + x_h^0 & 1 \leq H \leq \ell \\ (x_j = k_1 \cdot c_j \cdot t + x_j^0 & \ell + 1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

$$\text{avec } t \in \text{$\mathbb{Z}$/}, \ t \geqslant \max_{h,j} \left\{ \left[ \frac{-x_h^o}{z_1^c} \right], \left[ \frac{-x_j^o}{k_1 c_j} \right] + 1 \right\}$$

où  $\begin{bmatrix} \times \end{bmatrix}$  représente la partie entière de x, et  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  est une solution particulière de l'équation ( on va montré au début de cette démonstration qu'il existe des solutions entières), alors on obtient une infinité de solutions naturelles pour notre équation .

7.104 . Soit l'équation linéaire aux coefficients entiers

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b.$$

a) S'il existe 
$$(i_0,j_0) \in \{1,2,...,n\}^2$$
 tel que  $a_{i_0} = 1 \pmod{a_{j_0}}$ 

alors l'équation admet des solutions dans l'énsemble des nombres entiers.

b) Dans ce cas , la résoudre .

## Solution:

a) 
$$a_{i_0} = \pm 1 \pmod{a_{j_0}} \iff \overline{1} \ h_0 \in \mathbb{Z} : a_{i_0} - h_0 \ a_{j_0} = \pm 1 .$$

Soit d  $\sim$  (  $a_{i_0}$  ,  $a_{j_0}$  ) . Il en résulte que d  $a_{i_0}$  -  $a_{j_0}$ , donc d,  $\frac{1}{2}$  1, d'où d  $\sim$  1 .

Comme (  $a_1$  ,  $a_j$  )  $\sim 1$  , on a (  $a_1,\dots,a_n$  )  $\sim 1$  , mais 1 b .Donc l'équation admet des solutions entières .

b) 
$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{a_{i} \times i}} a_{i} \times i = \frac{\sum_{i \neq i_{0}} a_{i} \times i - (h_{0} a_{j_{0}} + 1) \times_{i_{0}} + a_{j_{0}} \times_{j_{0}} = i + j_{0}}{i + j_{0}}$$

$$= \frac{\sum_{i = i_{0}} a_{i} \times_{i} + a_{j_{0}} (\times_{j_{0}} + h_{0} \times_{i_{0}}) \pm \times_{i_{0}} = \frac{\sum_{i \neq i_{0}} a_{i} \times_{i} + a_{j_{0}}}{i \neq j_{0}}$$

:  $+a_{j_0}$   $+x_{i_0}$  = b, où  $+x_{j_0}$  +h<sub>0</sub>  $+x_{j_0}$  . Il en résulte :

$$\begin{array}{c} x_{\mathbf{i}_{0}} = \overline{+} \left( \begin{array}{c} \vdots \neq \mathbf{i}_{0} \\ \mathbf{i} \neq \mathbf{i}_{0} \\ \mathbf{j} \neq \mathbf{j}_{0} \end{array} \right) \\ x_{\mathbf{j}_{0}} = t - h_{0} x_{\mathbf{i}_{0}} = \underline{+} \left( \begin{array}{c} h_{0} \\ \mathbf{i} \neq \mathbf{i}_{0} \\ \vdots \neq \mathbf{i}_{0} \end{array} \right) \\ \mathbf{i} \neq \mathbf{j}_{0} \\ \mathbf{i} \neq \mathbf{j}_{0} \\ \end{array} \\ \text{avec } x_{\mathbf{i}} \in \mathbb{Z}, \mathbf{i} \notin \{: \mathbf{i}_{0}, \mathbf{j}_{0}\} \}, \text{ et } t \in \mathbb{Z} \left( \text{ paramètres } \right). \end{array}$$

7.105 . On donne le système :

fy  $(x_1, \dots, x_n, [x_1], \dots, [x_n], [x_n], [x_n], \dots, [x_n]) = b_j \in [0, j=1, n]$ où fy sont des fonctions linéaires qui ont leurs coefficients dans  $[x_n], [x_n], [x_n],$ 

#### Solution :

- (1) En écrivant  $x_i = \begin{bmatrix} x_i \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_i \end{Bmatrix}$  avec  $\begin{bmatrix} x_i \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbb{Z} \\ 0 \end{Bmatrix} \leftarrow 1$ , i=  $\overline{1,n}$ , on obtient (après élimination des dénominateurs ) le système équivalant :
- (2)  $g_j(x_1, \dots, x_n)$ .  $x_1, \dots, x_n) = c_j \in \mathbb{Z}$ , j=1,n, où les  $g_j$  sont maintenant des fonctions linéaires qui ont leurs coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

On resoudra ce systhème en considérant que  $\{x_1\}$  ....  $\{x_n\}$  sont les inconnues . Puisque :

$$\sum_{j=1}^{n} \angle_{i,j} \left[ x_{i,j} + \sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} \cdot \left\{ x_{i,j} \right\} = c_{i,j}, i = \overline{1,n},$$
et parce que  $\angle_{i,j} \left[ x_{i,j} \right], c_{i,j} \in \overline{1,n}, il en résulte:$ 

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} \left\{ x_{i,j} \right\} \in \overline{1,n},$$

On applique la méthode de la substitution .On calcule  $\left\{x_{j_1}\right\}$  d'une équation ,  $1\leqslant j_1\leqslant n$  , et l'on remplace dans les autres équations .Ramenons à un système linéaire de n-1 équations à n-1 inconnues .

Procédons de même avec ce nouveau système .(Si l'on obtient en route une équation impossible alors le système (2) n'admet pas de solutions . Stop .) A la fin on obtient :

Donc of 
$$\{x_j\}_n$$
 =  $h([x_1], \dots, [x_n]) + k \in \mathbb{Z}$ .

Donc of  $\{x_j\}_n$   $\in \mathbb{Z}$ . It en résulte:
$$\{x_j\}_n$$
 = o, ou  $\{x_j\}_n$  =  $\frac{P}{\mathcal{E}}$ ,  $P \in \mathbb{Z}$ , mais tel que of  $\mathbb{Z}$  of  $\mathbb{Z}$ .

Ces deux cas on peut les écrire comme un seul cas :

$$\left\{x_{j_n}\right\} = \frac{P}{e^r} \cdot P \in \mathbb{I}(/\text{ et } o \leq \frac{P}{e^r} < 1.$$

Soit S le nombre de solutions pour  $\{x_j\}$ . Maintenant on dera la route inverse jusqu'à la détermination de tous les  $\{x_j\}$ ,  $j=\overline{1,n}$ . On remplace la (les) valeur(s) de  $\{x_j\}$  dans le système antérieur de 2 équations à 2 inconnues . On obtient les valeurs de  $\{x_j\}$ .

Soit S le nombre de celles-ci . j<sub>n-1</sub>

La route inverse continue jusqu'à ce qu'on détermine x qui a  $S_{j_1}$  solutions;  $(\{j_1, ..., j_n\} = \{1, 2, ..., n\});$ On remarque que  $\{x_i\}$   $\{(i, i=1,n)\}$ . Si le système a des solutions il en résulte que celles-ci sont dans 🎾

Jusqu'à présent on a obtenu III Si solutions .

(3) En reportant toutes les valeurs de  $\{x_1\},\dots,\{x_n\}$  dans (2) on obtiendra un système linéaire de n équations à n inconnues :  $[x_1]$  ....  $[x_n]$  qui sera résolu en nombres entiers . On résoudra normalement dans  $\mathbb{R}^n$  , et si la isolution appartient à  $\mathbb{Z}^n$  alors cette solution est juste ( on effectue ensuite la relation (1) pour obtenir  $x_1, \dots, x_n$ ); sinon, elle ne convient pas •

On va exécuter le paragraphe (3) pour toutes les valeurs de  $\{x_1\},\ldots,\{x_n\}$ 

Ainsi , le système est bien résolu . Le nombre de solutions de celui-ci est  $\nearrow$  o et <  $\boxed{1}$  > > >

Résoudre dans //(/ l'équation : 3x-7y+2 Z=-18.

## Solution :

La solution générale dans 2 est la suivante :  $x=k_{1}$  ,  $y=k_{1}+2k_{2}$ ,  $Z=2k_{1}+7k_{2}-9$  , avec  $k_{1},k_{2}\in \mathbb{Z}$  . Comme x > 0, y > 0, Z > 0 il en résulte que  $k_1 > 0$ , et aussi que  $k_2 = \frac{k_1}{2} + 1$  et  $k_2 = \frac{9-2k_1}{2} + 1$ , c'est-à-dire on a  $k_2$  + 2 . D'où , la solution générale dans  $\frac{1}{\sqrt{sera}}$ :

 $x = k_1 , y = k_1 + 2 k_2 , Z = 2 k_1 + 7 k_2 - 9 , avec k_1 et k_2 de$  $//(/ \text{ et } k_2)/(\frac{2-2K_1}{7}) + 2$ .

$$2 \times + 15y + 9z = 44$$
.

#### Solution:

On a 
$$0 \le y \le \left[ \frac{44}{15} \right] = 2$$
.

A) 
$$y = 0 \implies 2x + 9z = 44 \implies 0 \leqslant z \leqslant \frac{44}{9} = 4$$

a) 
$$Z = 0 \implies x = 22$$

b) 
$$Z = 1 = - \times \times = \frac{35}{2}$$

c) 
$$Z = 2 \implies x = 13$$

e) 
$$Z = 4 = 2$$
  $x = 4$ 

B) 
$$y = 1 = 2x + 9 z = 29 = 0 \le z \le 3$$

a) 
$$Z = 1 = 2 \times 10$$

b) 
$$Z = 3 = 3 = x + 1$$

C) 
$$y = 2 \implies 2x + 9z = 14 \implies 0 \le z \le 1$$

Toutes les solutions sont :

Donc il y a un nombre limité de solutions ...

7.108 . Résoudre dans 7 l'équation :

17 
$$x_1$$
 + 20  $x_2$  = 18  $x_3$  = -34 .

## Solution :

On écrit l'équation ainsi :

$$20 x_2 - 18 x_3 + 17 (x_1 + 2) = 0$$

On note  $x_1 + 2 = t \in \mathbb{Z}$ . Il vient :

$$20 x_2 - 18 x_3 + 17 t = 0$$

C'est-à-dire : 20 
$$x_2 - 17 (x_3 - t) - x_3 = 0$$

On note  $x_3 - t = h \in \mathbb{Z} \cdot D^{\bullet}o\dot{u}$ :

$$20 x_2 - 17 h - x_3 = 0$$

Donc  $x_3 = 20 x_2 - 17 h$ .

$$\begin{cases} x_1 + 2 = t \\ x_3 - t = h \end{cases} = x_1 = t - 2 = (x_3 - h) - 2 =$$

$$= -h - 2 + 20x_2 - 17 h = 20 x_2 - 18 h - 2.$$

La solution générale est :

$$\begin{cases} x_1 = 20 \ k_1 - 18 \ k_2 - 2 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = 20 \ k_1 - 17 \ k_2 \cdot (k_1 \cdot k_2) \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}.$$

7.109 . Résoudre dans l'ensemble des nombres entiers l'équation:

15 x = 17 y + 9 Z = 
$$\checkmark$$

où 🗸 est un pæramètre entier .

## Solution:

L'équation s'écrit :

15 x + 9 ( Z-2y ) + y = 
$$\angle$$
 ou encore :

(1) 
$$15 \times + 9 + y = 4$$
, où  $t = Z - 2y$  (2)

il suit de (1) que 
$$\Rightarrow$$
 y = - 15 x -9t +  $\checkmark$  . (3)

il suit de (2) que : Z = t+2y.

Il résulte de (3) que Z = -30x - 17t + 2.

La solution générale entière est :

$$\begin{cases} x = k_1 \\ y = -15 \ k_1 - 9 \ k_2 + \infty \end{cases} \text{ avec } (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

$$Z = -30 \ k_1 - 17 \ k_2 + 2 \bullet ($$

$$\text{on a note } x = k_1 \text{ et } t = k_2 )$$

7.110 . Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $\neq 3 \times + 70 \text{ y} = 35 \text{ Z} + 6 \text{ m} = 75 \text{ .}$ 

#### Solution:

L'équation peut s'écrire :

$$3 \left( x+23y - 12Z + 2 w - 25 \right) + \left( y+z \right) = 1$$

Avec ces notations , on a :  $3 t_1 + t_2 = 1$  , équation qui admet la solution générale :

$$\begin{cases} t_1 = k \\ t_2 = -3k + 1 , \text{ avec } K \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Donc y + z =  $t_2$  = -3 k+1 , d'où y = -Z -3k + 1 , avec Z  $\in \mathbb{Z}$ . (1)

De manière analogue x + 23 y - 12 z + 2 w - 25 =  $t_1$  = k , ou x-23 z - 69 k + 23 - 12 z + 2 w - 25 = K ( on a utilisé (1) ).

Ainsi, x = 35 z - 2 w + 70 k + 2 .

La solution générale de l'équation dans  $\mathbb{Z}^4$ , sera : x = 35 z - 2 w + 70 k + 2 y = -z - 3 k + 2avec z, w,  $k \in \mathbb{Z}$ .

7.111. Résoudre l'équation  $x \cdot y + 5 \cdot z=2 = 0$  dans l'ensemble des nombres entiers .

## Solution :

 $\forall x \in \mathbb{Z}, \text{ on peut écrire : } x = 5 k_1 + r_1 \text{ , avec } \mathbf{K}_1 \in \mathbb{Z} \text{ et}$   $\mathbf{r}_1 \in \left\{0, 1, 2, 3, 4\right\}. \tag{1}$ 

 $\forall$  y  $\in$   $\mathbb{Z}$ , on pout aussi écrire : y = 5 K<sub>2</sub> + r<sub>2</sub>, avec K<sub>2</sub>  $\in$   $\mathbb{Z}$  et r<sub>2</sub>  $\in$   $\{0,1,2,3,4,\}$  . (2)

Il en résulte que 5 divise (  $r_1$   $r_2$  - 2 ). Donc , ( $r_1$  . $r_2$  )  $\in$  $\{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$ . (3) D'où , la solution générale sera :

$$\begin{array}{l} x = 5 \; \text{K}_1 + \text{r}_1 \\ y = 5 \; \text{K}_2 + \text{r}_2 \\ z = -5 \; \text{K}_1 \; \text{K}_2 - \text{K}_1 \; \text{r}_2 - \text{K}_2 \; \text{r}_1 + \frac{2 - \text{r}_1 \; \text{r}_2}{5} \\ \text{avec} \; (\text{K}_1 \; , \; \text{K}_2 \; ) \; \in \; \overline{\mathbb{Z}}^2 \; (\text{ des paramètres arbitraires}), \\ \text{et} \; (\; \text{r}_1, \; \text{r}_2) \; \in \; \left\{ (\; 1,2) \; , \; (3,4) \; , \; (4,3) \right\}. \end{array}$$

L'inconnue Z a été obtenue à partir de l'équation initiale puisque on a su les valeurs de x et de y .

7.112 . On donne l'équation  $x^2 + 3K_1 + 2 = (3 K_2 + 1)^{y}$ . Montrer que l'équation n'admet pas de solution naturelle , quels que soient ( K<sub>1</sub> , K<sub>2</sub> ) E  $\frac{7}{2}$ . Généraliser •

## Solution :

On a 2  $3 K_1 + 2 = 2 \pmod{3}$  et  $3 K_2 + 1 = 1 \pmod{3}$ . donc  $(3 K_2 + 1)^{y} = 1 \pmod{3}$ , ou  $X^2 = 1-2 = 2 \pmod{3}$ ; a)  $\sin x = M_3 + 1$   $\Rightarrow$   $x^2 = 1 \Rightarrow 2 \pmod{3}$ . b)  $\sin x = M_3 + 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow 2 \pmod{3}$ . c)  $\sin x = M_3 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow 2 \pmod{3}$ .

b) 
$$\sin x = M_x + 2 = 2 (\mod 3)$$

c) si 
$$x = M_3$$
 ====>  $x^2 = 0$  = 2 ( mod 3 )/

D'où  $+ \times \in //(/ \cdot) \times^2 = 2 \pmod{3}$ . Ainsi l'équation n'admet pas de solution naturelle .

## Généralisation :

L'équation  $x^2 + 3y + 2 = (3Z+1)^w$  n'admet pas de solution entière .

· La démonstration est la même . Tout d'abord on montre que si  $K_2 \neq 0$  alors y > 0, parce que si y < 0 il en résulterait qu'un nombre entier ( le membre gauche de l'équation ) est égal à un nombre non entier ( le membre droit ) .

7.113 . Réscudre l'équation xy + 4t - 7w + 14 = o dans l'emsembld des nombres entiers .

TO FERRING A SURVEY OF S

#### Solution:

On écrit : xy + 4t - 8w + 12 + w + 2 = 0On note t=2w + 3 = v, qui sera une nouvelle inconnue  $\sim$ 

Liequation devient: xy + 4v + w + 2 = 0 . ou W = -xy - 4v - 2 . Et t = v + 2w - 3 = v + 2 (-xy - 4v - 2) - 3 = v + 2

= -2 xy - 7v-7 . Si on change les notations ( par souci d'esthétique mathématique ) on a la solution générale entière:

$$\begin{cases} x = K_1 \\ y = K_2 \\ t = -2K_1 \cdot K_2 - 7K_3 - 7 \\ w = -K_1 \cdot K_2 - 4K_3 - 2 \text{, avec (} K_1, K_2, K_3 \text{) } \in \mathbb{Z}^3 \end{cases}$$

$$( \text{paramètres}).$$
7.114 . Montrer que l'équation :

 $2x^2 + 5 xy - 12 y^2 - 2 x + 3y - 1 = 0$ n'a pas de solution dans l'ensemble des nombres entiers :

# Solution:

L'équation s'écrit :

 $2 x^{2} + 8 xy - 3 xy - 12 y^{2} - 2 x + 3 y = 1$ on encore  $x(2x-3y) + 4y(2x - 3y) - 1 \cdot (2x - 3y) = 1$ . Donc , (2x-3y)(x+4y-1)=1

Comme x. y 🗲 💯 il en résulte qu'on a les possibilités suivantes:

a) soit 
$$(2 \times -3 \text{ y}) = 1$$
 (1)  $(2 \times +4 \text{ y} -1 = 1$  (2)

(2) x = -4y + 2, et en reportant dans (1) il vient \*  $-11 y = -3 \longrightarrow y - \frac{3}{11} - \frac{7}{1}$ 

b) soit 
$$(2x - 3y = -1)$$
 (3)  $x + 4y - 1 = -1$  (4)

(4)===> x = -4y , et en reportant dans (3) il vient : -8y - 3y = = -1

$$\Rightarrow y = \frac{1}{11} (\frac{1}{2} \mathbb{Z}).$$

Donc l'équation n'a pas de solution dans 7/2 .

7.115 . Démontrer que l'équation :

$$5 x^2 + 50 y^2 - 26 xy + 8 x - 46y + 15 * 0$$
n'admet pas de solution dans l'ensemble des nombres naturels .

# Solution I:

L'équation s'écrit :
$$(4x^{2} + 49y^{2} + 9 - 28xy + 12x - 42y) + (x^{2} + y^{2} + 4 + 2xy - 4x - 4y) + 2 = 0$$
ou  $(2x - 7y + 3)^{2} + (x+y - 2)^{2} + 2 = 0$ 

Mais cette équation n'admet pas de solution dans  $\mathbb R$  , parceque ( 2x-7y+3 )  $^2+(x+y-2)^2+2>0$  .Donc elle n'admet pas mon plus de solution dans  $/\!(/$  .

# Solution II :

L'équation s'écrit :  

$$5 x^2 + 2 (-13y + 4) x + (50 y^2 - 46 y + 15) = 0$$
  
 $\triangle = b^{12} - ac = 169 y^2 + 16 - 104y - 250 y^2 + 230 y - 75 =$   
 $= - [(9y - 7)^2 + 10] \angle 0$ 

Il en résulte que l'équation n'admet pas de solution dans R

Donc elle n'admet pas non plus de solution dans /// .

7.116 . Résoudre dans l'ensemble des nombres entiers l'équation:  $x^3 - 3 y = 2$  .

## Solution :

L'équation écrit :  $x^3 - 2 = 3y$ . Donc  $x^3 - 2$  est divisible par 3 . c'est-à-dire  $x^3 = M_3 + 2$  .

Soit 
$$x = 3 + r$$
,  $r = 0.1.2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$   
 $x = 3 + 2$   
 $x = 3 + 2$ 

Donc x = 3 k+2, k  $\in \mathbb{Z}$ , d'où =  $y = \frac{x^3 - 2}{3} = (\frac{3k+2}{3})^3 - 2 = 9 k^3 + 18 k^2 + 12 k + 2.$ 

La solution de l'équation est :  $\begin{cases} x=3k+2 \\ y=9k^3+18 k^2+12k+2 \end{cases}$ 

7.117. Dépontrer que l'équation  $x^4 - 7 y_1 \cdots y_n = 14 Z + 10$ , n > 1 : n'admet aucune solution entière .

## Solution :

On paut écrire :  $x^4 - 7$  (  $y_1 ... y_n - 2z - 1$  ) = 3 , ou encore  $x^4 - 3 = 7$  (  $y_1 ... y_n - 2z - 1$  ) .

D°où 7 divise  $x^4 - 3$ , c'est-à-dire  $x^4 = M_7 + 3$ .

Soit  $x = M_7 + r$ , avec  $r \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ . Alors  $x^4 = M_7 + r^4$ ; mais  $r^4 \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ . Nais on voit que  $r^4 \neq 3 \pmod{7}$ , donc  $x^4 \neq M_7 + 3$ . Il on résulte que l'équation n'admot aucune solution entière.

tinn of Bestelle with the objects of the best new some in the 7.118 . Résoudre dans l'ensemble des nombres entiers l'équation:  $5 \times^4 - 6 y = 20.$ 

# 

$$5 \times^4 - 6y = 20 \stackrel{\longleftarrow}{\longleftarrow} 6y = 5 ( \times^4 - 4)$$

Donc yest divisible par 5.

Soit 
$$y = 5 z , z \in \mathbb{Z}$$
  
L'équation devient :

$$5 \times^4 - 30 z = 20$$
 (====>)  $x^4 - 6 z = 4$  (===>)  $z = \frac{x-4}{6} \in \mathbb{Z}$ .

Control of the Contro

The AND THE STAND CONTRACTOR

Donc 
$$x^4 \equiv 4 \pmod{6}$$

Il en résulte :

en résulte :  

$$x = 6 \text{ k+2 ou } x = 6 \text{ k+4 , k} \in \mathbb{Z}$$

Les solutions entières de l'équation sont :

$$\begin{cases} x = 6 & k+2 \\ y = 5 & \frac{(6 + 2)^4 - 4}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 & k+4 \\ y = 5 & \frac{(6 + 4)^4 - 4}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 & k+4 \\ y = 5 & \frac{(6 + 4)^4 - 4}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 & k+4 \\ y = 5 & \frac{(6 + 4)^4 - 4}{6} \end{cases}$$

7.119 . Résoudre dans l'ensemble des nombres entiers l'équation :

# Solution:

 $_{4 \times^{y}} = 7 z + 5$ ; puisque  $z \in \mathbb{Z}$  on a  $_{4 \times^{y}} \in \mathbb{Z}$ . Donc  $x^{y} = \alpha \in \mathbb{Z}$  ou  $x^{y} \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\}$ ; mais  $\overline{z} = \frac{4 \times \sqrt{5}}{7}$ d'où  $x^y = \frac{1}{2}$  ou  $x^y = \infty \in \mathbb{Z}$ . Une solution est x = -2, y = -1. z=-1 puisque l'équation  $x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$  admot la solution en nombre entiers x = -2 et y = -1.

Si  $x^y = \sqrt{c} / 7$ , l'équation nitiale devient  $4 \times -7z - 5 = 0$  qui admet la solution générale entière .

$$\begin{cases} z = 7k+3 \\ z = 4k+1 \text{ , avec } k \in \mathbb{Z} \text{ ( paramètre ).} \end{cases}$$

Donc  $x^{y}$ -7k-3=o , avec x,y,z de  $\overline{Z}$  .Il en résulte \$

$$K = \frac{x^{\frac{y}{2}} \cdot 3}{7}$$
. Mais  $x = M_7 + r$ , avec  $r \in \{0, 1, 2, ..., 6\}$ .

On écrit x= 
$$\mathbb{Z}$$
s+r,  $s \in \mathbb{Z}$ , et alors  $(\frac{7s+r}{7})^{\frac{y}{3}} \in \mathbb{Z}$ si

et sculement si r= 3 cu 5

$$x = 7s + 3 = 200 = 3$$
,  $y = 6t + 1$ ,  $t \in //(/.$ 

$$x = 7s + 5 = --- y = 6t + 5, t \in //(/.$$

Donc les solutions entières de l'équation sont :

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = 7s+3, s \in \mathbb{Z}, \\ y = 6t+1, t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \begin{cases} x = 7s+5, s \in \mathbb{Z}, \\ y = 6t+5, t \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$z = -1 \begin{cases} z = \frac{4(7s+3)^{6t+1}-5}{7} \end{cases} \begin{cases} z = \frac{4(7s+5)^{6t+5}-5}{7} \end{cases}$$

7.120 . Résoudre dans  $\frac{7}{2}$  l'équation :  $x^y + 5z - 2 = 0$ 

## Solution:

Do léquation on tire :  $x^y - 2 = M_5$ 

x a la forme : 5 k<sub>1</sub> + r<sub>1</sub> , k<sub>1</sub>  $\in \mathbb{Z}$  et r<sub>1</sub>  $\in \{0,1,2,3,4\}$ 

Il faut avoir :  $x^{y} = 2 \pmod{5}$ , ou  $(5k_{1}+r_{1})^{y} = r_{1}^{y} = 2 \pmod{5}$ 

Ainsi que 
$$r_1 \neq 0$$
 ,  $r_1 \neq 1$ ,  $r_1 \neq 4$ 

Pour 
$$r_1 = 2$$
 on a  $2\sqrt{4}^{+1} \equiv 2 \pmod{5}$  et

Pour  $r_1 = 3$  on a  $3^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} = 2 \pmod{5}$ .

Donc 
$$\begin{cases} x = 5 k_1 + 2 & k_1 \in \mathbb{Z} \\ y = 4 k_2 + 1 & K_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
 (1)

ot 
$$\begin{cases} x = -k_1 + 3, & k_1 \neq 2 \end{cases}$$
  
 $\begin{cases} y = 4 k_2 + 3, & k_2 \in //(/) \\ z = \frac{2 - (5 k_1 + 3)^4 k_2 + 3}{5} \end{cases}$  (2)

On observe que z  $\in \mathbb{Z}$  en ( 1 ) et en ( 2 ) aŭssi . Il en sésulte que :

$$2^{4k}2^{+1} \equiv 2 \pmod{5}$$
 at  $3^{4k}2^{+3} \equiv 2 \pmod{5}$ .

La solution générale entière s'obtient en réunissant (1) et (2) .

7.121 . Résoudre dans  $/\!/(/l^{\epsilon}$ équation  $x! = y^{z}$  .

# Solution :

$$\begin{cases} x = 0 \implies \begin{cases} y=1 \text{ et } z \in I/(/\\ y \in I/(/^{\circ} \text{ et } z=0) \end{cases} \\ x = 1 \implies \begin{cases} y=1 \text{ et } z \in I/(/\\ y \in I/(/^{\circ} \text{ et } z=1) \end{cases} \\ x > 3 \implies y=x! \text{ et } z=1 \end{cases}$$

Démontrons la dernière affirmation , parce que les deux premières sont banales . On suppose ( par l'absurde ) que  $z=K\geqslant 2$ . On a  $x!=y^K$  . On exclut le cas x=2 qui implique y=2 et z=1. Donc  $x\geqslant 3$  . D'où x! contient au moins deux diviseurs premiers (2 et 3). Donc  $y^K$  admet aussi au moins deux diviseurs premiers (2 et 3), d'où y admet au moins deux diviseurs premiers (2 et 3).

Soient  $x_1, \dots, x_p$  tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à x ( on a montré que  $p \ge 2$  ).  $x! = x_1^{-1} \dots x_p^{-1} = x_1^{-1} \dots x_p^{-1}$   $1 \le i \le p$ . Ainsi  $x_1^{-1} \dots x_p^{-1} = y^2 \cdot D^2$  où il faut que  $x_1^{-1} \cdot x_2^{-1} \cdot x$ 

On considère  $x_p$ , le plus grand nombre premier inférieur ou égal à x. Conformément à un théorème de Tchébycheff, entre x et x il existe au moins un nombre premièr. Donc x  $< x_p < x$ 

$$< x \cdot Alors > p = \left(\frac{x}{x_p}\right) + \left(\frac{x}{x_p^2}\right) + \dots = 1 \cdot Il \text{ en résulte}$$

que z = 1 . Ainsi ( s ) représente toutes les solutions de l'équation .

7.122 . Déterminer la forme générale de la solution dans l'ensemble de nombres entiers de l'équation :

$$\begin{array}{c|c}
 & n & p_{i} \\
\hline
 & & \times i \\
\hline
 & & & \\
 & & & \\
\hline
 & & &$$

m  $\leqslant$  n ,  $r_{j}$  < p  $_{j}$  , j  $\in$   $\left\{1,\ldots,m\right\}$  , où tous les p  $_{i}$  sont des nombres pairs , et tous les  $r_{s}$  sont impairs .

#### Solution :

On a 
$$\left| \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} x_j^{pi}} \right| = \left| \frac{m}{\sum_{j=1}^{m} x_j^{rj}} \right| \leq \left| \frac{m}{\sum_{j=1}^{m} x_j^{rj}} \right| = \left| \frac{m}{\sum$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{m} |x_j|}{\sum_{j=1}^{r_j} \operatorname{ct}} \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{p_i}}{\sum_{i=1}^{r_j} |x_i|} \right|^{p_i} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{m} | \times_{j} |^{r_{j}}$$

D'où 
$$\frac{n}{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p} = \frac{m}{\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p}$$
, il en résulte :

$$\sum_{j=1}^{m} \left( \begin{vmatrix} x_j \\ x_j \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_j \\ x_j \end{vmatrix} \right) + \sum_{j=m+1}^{n} \begin{vmatrix} x_j \\ x_j \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Puisque } \left\{ \begin{vmatrix} x_j \\ x_j \end{vmatrix} + \sum_{j=m+1}^{p} \begin{vmatrix} x_j \\ x_j \end{vmatrix} \right\} = 0$$

$$\text{on a } x_j = 0 \text{ pour } j \in \{m+1, \dots, n\}, \text{ et } \left\{ x_j \right\}^{p_j} - \left\{ x_j \right\}^{p_j} = 0$$

$$\text{pour } j \in \{1, \dots, m\}, \text{ Donc } x_j \in \{0, 1, -1\}, \text{ pour } j \in \{1, \dots, m\}.$$

La forme générale de la solution en nombres entiers de l'équation est :

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1, \dots, x_m = \xi_m, x_{m+1} = \dots = x_n = 0, \text{ avec } \xi_j = 0 \text{ ou } 1, \text{ et} \\ \frac{m}{1} \xi_j \neq 0; \text{ et} \end{cases}$$

$$x_1 = \underbrace{x_1}_{1} \cdot \dots \cdot x_m = \underbrace{x_m}_{m+1} \cdot \dots \cdot x_m = 0 \text{ avec} \underbrace{x_m}_{j} \cdot \dots \cdot x_m = 0$$

Le nombre des solutions est 2 ( $c_m^1 + c_m^2 + \cdots + c_m^m$ ) =

$$= 2 (2^{m} - C_{m}^{0}) = 2^{m+1}$$

7.123 . Déterminer l'équation linéaire qui admet la solution dans l'ensemble des nombres entiers suivante :

$$\begin{cases} x_1 = 3 & K_1 - 7K_2 + 5 \\ X_2 = K_1 + 2 & K_2 \\ X_3 = 4K_1 + 13K_2 - 71 \end{cases}$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont des paramètres dans  $\overline{Z}$  .

Solution: L'équation a trois inconnucs:  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ .

Sa forme générale est:  $a_1$   $x_1$  +  $a_2$   $x_2$  +  $a_3$   $x_3$  = b.

avec  $a_1$ ,  $b_1 \in \hat{\mathcal{U}}_2$ , i = 1, 2, 3. Ou:  $x_1 + \frac{a_2}{a_1} x_2 + \frac{a_3}{a_1} x_3 = \frac{b}{a_1}$ .

En notant différemment les coefficients , a-t-on :  $x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$  avec  $a_2$ ,  $a_3$  ,  $b \in \mathbb{Q}$  .

On pout écrire pour  $K_1$  et  $K_2$  quelconques dans  $\underline{\mathbb{Z}}$ :

$$3K_1 - 7K_2 + 5 + A_2K_1 + 2 a_2 K_2 + 4a_3K_1 + 13a_3K_2 - 71 a_3 = b$$
  
Pour  $K_1 = K_2 = 0$  ----> 5-71  $a_3 = b$  (1)  
Pour  $K_1 = 0$ ,  $K_2=1$  ----> -7+2 $a_2$ +13 $a_3 = 0$  (2)  
Pour  $K_1 = 1$ ,  $K_2=0$  ---->  $3+a_2$ +4 $a_3 = 0$  (3)  
(On a utilisé (1) pour obtenir (2) et (3).)

Mais (4) est un système de trois équations à trois inconnues que l'on va résoudre normalement.

Do (3) il vient  $a_2 = -4a_3 - 3$ . D'après (2), il en résulte maintenant -7+13  $a_3 - 8$   $a_3 - 6 = 0$ . Ou  $a_3 = \frac{43}{5}$ , donc  $a_2 = -\frac{67}{5}$ .

Do (1) il vient  $b = \frac{25 - 923}{5} = -\frac{898}{5}$ .

Donc , l'équation est :

$$5 \times_{1} - 67 \times_{2} + 13 \times_{3} = -898$$

7.125 . On considere un naturel n > 3 et  $a \in \mathbb{R}$  . Résoudre l'inégalité :  $\left[\frac{x+a}{n}\right] + \left[\frac{x-a}{n}\right] > \left[x\right]$ . Discussion.

# Solution:

Soit  $x = ng + r \cdot o < r < n \cdot r \in \mathbb{R}$  ,  $q \in \mathbb{Z}$ .

1) Si a =  $nq_a$ ,  $q_a \in \mathbb{Z}$ , alors l'inégalité du problème devient :  $2\left(\frac{x}{n}\right) |x|(1)$ , ce qui est équivalent à (2-n)  $q \ge 0$ .

Done  $x \in M_1 = \{y \mid y = nq + r : 0 \le r < n : r \in \mathbb{R} : q \le 0, q \in \mathbb{Z}\}$ 

II) Si a  $\neq$ nq<sub>a</sub> , q<sub>a</sub>  $\in$   $\overline{Z}$  , alors a s'écrit \*

$$a \neq nq_a + r_a$$
,  $0 < r_a < n$ ,  $r_a \in \mathbb{R}$ ,  $q_a \in \mathbb{Z}$ . (2)

On peut supposer o< a < n, puisque , avec (2) , l'inégalité du problème devient équivalente à

On a 
$$\left[\frac{x+a}{n}\right] + \left[\frac{x-a}{n}\right] \geqslant \left[x\right]$$
 (3)

qui est équivalent à  $(2-n)q + E(r) \ge (r)$  (4)

où  $E(r) = \left\lfloor \frac{r+a}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r-a}{n} \right\rfloor = \left\{ \begin{array}{l} -1 \text{, si } r < \min \left\{ a, n-a \right\} \\ \text{o, si } \min \left\{ a, n-a \right\} < r < \max \left\{ a, n-a \right\} \\ +1 \text{, si } r \geqslant \max \left\{ a, n-a \right\} \end{array} \right\}$ 

1)  $0 \le r < \min \{a, n-a\}$  . Alors . (4) <==> (2-n)q -1 >  $\lceil r \rceil$ . Ou  $q \le -1$  .  $\ll$  )  $(q = -1) \Rightarrow (n-3 > \lceil r \rceil$  )

 $\times \in M_2 = \{y/y = -n+r : 0 \le r < \min \} \text{ a,n-a} \text{ et } [r] \le n-3\}$ 

B)  $(q = -2) = (y/y = -n+r, 0 \le r < min; a,n-a; et [r] < n-3]$ 

(B)  $(q = -2) \Rightarrow (4) \Leftrightarrow (2n-5) = [r]$  $\Rightarrow x \in M_3 = \{y \mid y = -2n+r, o : r < \min\{a, n-e\} \text{ et } [r] \le 2n-5\}$ .

y )( q ≤ -3 )=x=⇒ (4) est vrai .

 $(1) \times (1) \times (2) \times (3) \times (4) \times (4)$ 

2) min {a, n-a} < r < max {a,n-a} . ∧lors (4) <==>( (2-n)q > [n]).

 $\propto$ )(q=-1)  $\Rightarrow$   $\times \in M_5 = \{y | y = -n+r : min \{a,n-A\} \le r < max | a, n-a \} : [r] < n-2 \}$ .

- $\beta) (-q \le -2) \Longrightarrow x \in M_6 = \begin{cases} y/y = qn + r, \min \{a, n-a\} \le r < max \{a, n-a\}, q \le -2, q \in \mathbb{Z} \end{cases}$ 
  - 3)  $\max \{a, n-a\} \leqslant r \leqslant n \Longrightarrow (4) \leqslant \Longrightarrow ((2-n)q+1 > [r])$   $= \Longrightarrow \times \in M_7 = \{y/y = qn + r \cdot \max\{a,n-a\} \leqslant r \leqslant n \cdot q \leqslant -1 \cdot q \in \mathbb{Z}\}$ at on a discuté tous les cas .

### 7.127 .

Trouver une méthode de résolution en nombres naturels pour l'équation :

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i + a = b \cdot \sqrt{c \cdot \prod_{j=1}^{n} y_j}.$$

avac a , b, c < / / . p < / // .

# Solution :

L'équation aura une infinité de solutions naturelles lorsque b'∙c ≠ 0.  $\forall h \in \{1, ..., n-1\}$  on prend  $y_h \in I(/\text{quesconque} \cdot \text{Construisons} y_n \text{ tel que } c \cdot y_1 \cdot \cdot \cdot y_n = K^p \text{ avec } K \in I(/\text{ } \cdot \cdot (1))$ 

Soit  $y_n'$  le plus petit nombre naturel qui a la propriété (1). (Il existe un tel  $y_n'$  parce que , si on écrit chaque  $y_h = \frac{1}{1} P_i$  avec  $x_i \in \mathbb{Z}(/$  et  $p_i$  étant le i-ième nombre premier ( positif)  $h \in \{1, \dots, n-1\}$  , on prend  $y_n' = \frac{1}{1} P_i$  avec  $B_{in} \in \mathbb{Z}(/$  et les  $B_{in}$  sont choisis tels que  $x_i' + \frac{n-1}{2} x_i' + \frac{n-1}{2} x_i' + \frac{n-1}{2} x_i'$  où

1'on écrit c =  $\sqrt{\frac{1}{i}}$  p<sub>i</sub> avec  $\sqrt[4]{i}$  { | (/, et  $\beta_{in}$  ( pour chaque i) est le plus petit nombre naturel qui vérifie cette propriété.)

Construisons  $y_n \neq y_n'$  •  $t^p$  avec t  $\in$  /(/° , t étant un paramètre • L'équation devient :  $\frac{m}{\sum_{i=1}^{m} x_i} + a = b \cdot K \cdot t$  , où les incon-

nucs sont x<sub>1</sub>, ..., x<sub>n</sub> et t . On a encore :

$$\sum_{i=1}^{m} x_i + a = x_i t , \text{ on a nuté b:} K = x_i / (/ \cdot )$$

A) Si b.c = o , alors l'équation  $\sum_{i=1}^{m} x_i + a = o \text{ n'admet pas}$ 

de solution en nombres naturels .

B) Si bic  $\neq$  o , alors  $\propto$   $\neq$  o . L'équation admet une infinité de solutions naturelles :  $\forall$  s $\in$  {1,...,m-1}  $\times_s = \times \cdot w_s + r_s$  , où o  $< r_s < \times < -1$  ,  $r_s \in \mathbb{M}/$  , et  $w_s$  est un paramètre naturel , et  $\times_m = \times \times_m + r_m$  , où o  $< r_m < \infty -1$  mais  $r_m$  est choisi tel que

 $\frac{m}{\sum_{i=1}^{m} r_i} + a = M_{\infty} \text{ (on a noté } M_{\infty} \text{ un multiple de } \times \text{) ct aussi}$   $r_m \in I(/: w_m = \text{paramètre naturel .}$ 

7.128 . On donne l'équation P  $(x_1,\dots,x_n)$ =0 avec  $P(x_1,\dots,x_n)$  un polynôme du deuxième degré en  $x_1,\dots,x_n$  à coefficients réels . Nontrer que  $\Delta_{\mathbf{x}_1}$  est un carré parfait si et seulement si  $\Delta_{\mathbf{x}_1}$  est un carré parfait . (Par  $\Delta_{\mathbf{x}_1}$  on a noté le déterminant de l'équation initiale de deuxième degré rapportée à l'inconnue  $\mathbf{x}_h$  )

#### Solution :

#### Nécessité .

( La démonstration réciproque sera analogue .) 2 L'équation s'écrit :  $A_{\mathcal{L}} \cdot x_{i} + B_{i} \cdot x_{i} + C_{x_{i}} = 0$ , (1) où A est une constante et  $B_{i}$  une fonction linèaire de premier degré en  $x_{1} \cdot \cdots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \cdots \cdot x_{n}$ . ( $\wedge$  est une constante , parce que sinon il en résulterait que P a un degré strictement supériour à  $2 \cdot$ )

 $\triangle_{x_i} \text{ étant un carré parfait } \text{ cala implique que } \triangle_{x_i} = \mathbb{Z}_{i}^2 (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \text{ } \text{ av c } \mathbb{K}_i \text{ fonction linéaire du premier degré en } \mathbb{Z}_{i}^2 \dots \mathbb{Z}_{i-1} = \mathbb{Z}_{i+1}^2 \dots \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n$ 

(1) devient: 
$$A(x_{i} - \frac{B_{i} + K_{i}}{2A}) \left(x_{i} - \frac{B_{i} - K_{i}}{2A}\right) = 0$$
, ou

$$A = \frac{2A \cdot x_{3} + B_{i} - K_{i}}{2A} \cdot \frac{2A \cdot x_{i} + B_{3} + K_{i}}{2A} = 0$$
 (2)

Puisque  $2A \cdot x_i + B_i + K_i$  sont des fonctions du premier degré en  $x_1, \dots, x_n$  on peut calcular  $x_j$  en fonction de  $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$  (2) devient  $A \cdot \left( x_j - f_1 \left( x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n \right) \right)$ .

$$\left(\begin{array}{c} x_{j} - f_{2} \left(x_{1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n}\right) \\ 2 A \end{array}\right) \xrightarrow{\text{par notation}}$$

 $\frac{\text{par notation}}{\text{B}} \left( x_{j} - g_{1} \left( x_{1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{1} \left( x_{j}, \dots, x_{j-1}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{1} \left( x_{j}, \dots, x_{j-1}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{1} \left( x_{j}, \dots, x_{j-1}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{1} \left( x_{j}, \dots, x_{j-1}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{1} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{1} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{1} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{1} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{1} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{1} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{1} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{1} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{1} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{1} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{2} \left( x_{j}, \dots, x_{n} \right) \right) \cdot \left( x_{j} - g_{$ 

 $-g_{i}(x_{1},\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_{n})) = 0 \cdot \text{où } g_{1}, g_{2} \text{ sont aussi des}$  fonctions linéaires en  $x_{1},\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_{n}$ . Donc  $\triangle x_{j}$ 

est un carré parfait .

7.129 . Soient  $a_{\mathcal{S}(n)} \times^n \div \cdots + a_{\mathcal{T}(1)} \times^{+a} \mathcal{T}(o) = 0$  toutes les équations obtenues par permutations circulaires des coefficients, sur l'ensemble  $\left\{a_n,\dots,a_1,a_0\right\}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ , 0 < i < n, n pair. a) Montrer que ces équations admettent une racine commune réelle si et seulement si  $a_n \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow a_1 \leftrightarrow a_0 = 0$ .

b) Soit  $\mathbf{x}_0$  la racine commune réelle . S la somme de toutes les racines des équations . P le produit de toutes les racines des équations . Alors :

$$S-x_0 + (n+1) - \frac{P}{x_0} - \left( \frac{n-2}{a_{n-1}} - \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} + \frac{a_0}{a_{n-1}} + \frac{a_1}{a_n} \right)$$

# Solution :

En tout en a n+1 équations ,

a) On a bien sûr  $a_{K}(n)$   $x_{0}^{n}$  + ...  $a_{K}(1)$   $x_{0}^{n}$  +  $a_{K}(0)$  = 0.0  $a_{K}(n)$  Soit donc  $x_{0}$  la rawine commune réelle . On fait la somme de toutes les rélations (1), et il vient :  $S_{1}(x_{0}^{n} + x_{0}^{n-1} + ... + x_{0}^{1} + 1) = 0$ . Il en résulte  $S_{1} = 0$  ou  $x_{0}^{n} + x_{0}^{n-1} \neq ... + x_{0}^{1} + 1 = 0$ , mais il n'existe pas  $d^{2}x_{0} \in \mathbb{R}$  qui annule l'équation  $x^{n} + ... + x^{1} + 1 = 0$ , avec n pair . D'où  $S_{1} = 0$ ; mais  $S_{1} = a_{1} + ... + a_{1} + a_{0}$ .

Réciproquement :  $S_1=0$  . Cela implique que a  $C_k(n)$  .  $1^{n}+\dots+a$   $C_k(1)$ 

1 + a  $r_{K}(0)$   $S_{\eta}^{=0}$ ,  $0 \le K \le n$ . Donc toutes les équations admettent la racine commune réelle  $x_{0} = 1$ .

tent la racine commune réelle 
$$x_0 = 1$$
.  
b)  $S-x_0 = \left(-\frac{a_1}{a_n} - 1\right) + \left(-\frac{a_0}{a_{n-1}} - 1\right) + \left(-\frac{a_1}{a_{n-2}} - 1\right) + \dots + \left(-\frac{a_2}{a_0} - 1\right)$ 

$$P = \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_1}{a_0} = 1 \cdot \frac{a_1}{a_0}$$

$$Donc S - x_0 + (n+1) \cdot \frac{P}{x_0} = -\left(\frac{a_0}{a_{n-1}} + \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1-2}}\right) \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-1-2}}$$

7.130. Résoudre dans 

1 'équation = (x+1) x + (x+2) x = (x+3) x

(Amer. Math. Monthly 1985)

#### Solution :

Evidemment x > -1 , puisque les bases des puissances doivent être non négatives , et que pour x=-1 l'opération o $^{-1}$  n'a pas de sens .

Si on a  $(x+3)^{\times} \neq 0$ , divisons l'équation par colui-ci.Il on résulte que  $\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{\times} + \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{\times} = 1$ .

Soient  $g_1(x) = (\frac{x+1}{x+3})^x$  et  $g_2(x) = (\frac{x+2}{x+3})^x$  et  $f(x) = g_1(x) + g_2(x)$ ,

qui ont le même domaine de définition  $\hat{j}-1$ ,  $+\infty$  [ .

Montrons que  $g_1$  et  $g_2$  sont strictement décroissanter , d'où il résulte que f est aussi strictement décroissante .

On construit les représentations graphiques de g<sub>1</sub> et g<sub>2</sub> •

Pour 
$$g_1 \stackrel{?}{=} \lim_{x \to \infty} g_1(x) = \lim_{x \to \infty} \left[ \left( 1 + \frac{-2}{x+3} \right)^{\frac{-2}{x+3}} \right]^{-\frac{2}{x+3}} = \frac{1}{4^2} < \frac{1}{4}$$

 $x = 0 \implies g_1(0) = 1$ ;

La droite d'équation  $y = \frac{1}{e^2}$  est une asymptote horizontale quand x tend vers +  $\infty$ .

La droite d'équation x=-1 est une asymptote verticale quand x tend vers + > \*\*\*

Le graphique de  $g_1$  se trouve sur la figure (2).

Pour  $g_2$ : x = 0  $g_2$   $g_$ 

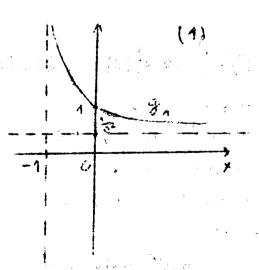
$$\lim_{x \to \infty} g_2(x) = \lim_{x \to \infty} \left( 1 + \frac{-1}{x+3} \right) \xrightarrow{\frac{x+3}{-1}} \frac{-1}{x+3} \cdot x$$

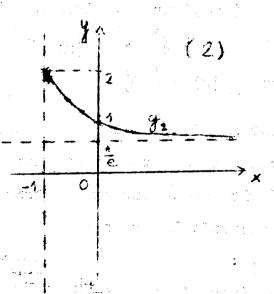
$$= e^{-1} = \frac{1}{e^2} < \frac{1}{2}.$$

D'où la droite d'équation  $y = \frac{1}{-c}$  est une asymptote horizontale quand x tend vers +  $\infty$ .

Le graphique de g<sub>2</sub> se trouve sur la figure (2).

De (1) et (2) on tire que  $g_1$  et  $g_2$  sont strictement décroissant tes sur  $\int_{-1}^{-1} .+ \cos \left[ \cdot \right]$ , donc on a la même propriété pour  $\left[ \cdot \right]$ . Parce que  $\left[ \cdot \right]$  (2) =1 il en résulte que x=2 est la scule qolution réelle de l'équation .





7.131. Sachant que  $b^2 - 4$  ac est un carré parfait , trouver un procédé de résolution dans l'ensemble des nombres entiers de l'équation :  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + fy + b = 0$ , avec a,b,c,d, f,e, entiers .

Solution; Essayons d'écrire l'équation sous la forme  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + fy + c = (\bowtie_1 x + \beta_1 y + \sum_1)(\bowtie_2 x + \beta_2 y + \sum_1) + d$ , où  $\bowtie_1 : \beta_1 : \sum_1 : d \in Q$ ,  $i \in \{1,2\}$ . On a  $\bowtie_1 \bowtie_2 x^2 + \bowtie_1 \beta_2 xy + \bowtie_1 \sum_2 x + \beta_1 \bowtie_2 xy + \beta_1 \beta_2 y^2 + \beta_1 \sum_2 y + \sum_1 \bowtie_2 xy + \sum_1 \beta_2 y + \sum_1 \sum_2 y + \sum_1 y +$ 

$$(1) \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & = & c \\ & & & \beta_1 & \beta_2 & = & c \\ & & & & \beta_1 & \beta_2 & + \beta_1 & \beta_2 & = & b \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & + \beta_2 & \beta_2 &$$

qui est un s'stème du deuxième egré , de 6 équations à 7 inconnues  $\Rightarrow \propto_1, \sim_2, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2, \delta$ . De (1) on tire  $\propto_2 = \frac{a}{\propto_1}, \beta_2 = \frac{c}{\beta_1}$  et  $\propto_1, \frac{c}{\beta_1} = \frac{a}{\sim_1}$ . By Lil en résulte

que cz +  $\frac{a}{z}$  = b, où z =  $\frac{1}{\beta_1}$   $\in \mathbb{Q}$  · D'où cz<sup>2</sup> - bz + a = o;

mais il faut que  $\triangle_z$  soit un carré parfait , c'est-à-dire que  $b^2-4$  ac =  $K^2$ ,  $K \subset \mathbb{Z}$ , ce qui est satisfait par hypothèse . Donc  $z=\frac{x_1}{\beta_1}=\frac{b^+K}{2c}$  . Alors  $\beta_1=x_1$  .  $\frac{2c}{b+K}$  et  $\beta_2=\frac{b+K}{2x_1}$ .

On remplace on (2) a at on obtient :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = d : \frac{2c}{b+K} \cdot \frac{1}{2} + \frac{b+K}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = f;$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot$$

puisqu'on a un système linéaire de 2 équations à deux inconnucs  $(w = \frac{x_1}{x_2})$  o De (3), il résulte qu'on peut ex-

primer  $\aleph_1$  et  $\aleph_2$  en fonction de  $\bowtie_1$  ? De l'équation  $\aleph_1$   $\aleph_2$  +  $\ell$  =e, on fait sortir  $\ell$  en fonction de  $\bowtie_1$ . On donne une valeur convenable à  $\bowtie_1$  et on détermine ainsi toutes les inconnues. On a:  $(\bowtie_1 x + \beta_1 y + \aleph_1)$   $(\bowtie_2 x + \beta_2 y + \aleph_2) = -\int$ . On met les coefficients au même dénominateur et on élimine celui-ci. Puis on trouve  $(\bowtie_1 x + \beta_1 y + \aleph_1)$   $(\bowtie_2 x + \beta_2 y + \aleph_2) = -\int$ , avec  $\bowtie_1$ .  $\beta_1$   $(\bowtie_2 x + \beta_1 y + \aleph_1)$   $(\bowtie_2 x + \beta_2 y + \aleph_2) = -\int$ , avec  $\bowtie_1$ .  $\beta_1$   $(\bowtie_2 x + \beta_1 y + \aleph_1)$   $(\bowtie_2 x + \beta_2 y + \aleph_2) = -\int$ , avec  $\bowtie_1$ .  $\beta_1$   $(\bowtie_2 x + \beta_1 y + \aleph_1)$   $(\bowtie_2 x + \beta_2 y + \aleph_2) = -\int$ , avec  $\bowtie_1$ .  $\beta_1$   $(\bowtie_1 x + \beta_1 y + \aleph_1)$   $(\bowtie_2 x + \beta_2 y + \aleph_2)$   $(\bowtie_1 x + \aleph_1)$   $(\bowtie_2 x + \aleph_2)$   $(\bowtie_1 x + \aleph_1)$   $(\bowtie_2 x + \aleph_2)$   $(\bowtie_1 x + \aleph_1)$   $(\bowtie_1 x + \aleph_1)$ 

 $x_i^*x + \beta_i^*y + \delta_i^* = d_i \text{ avec } d_1 d_2 = -\delta \text{ of } i \in \{1,2\}.$ 

 $\frac{7.132}{\sum_{i=0}^{n}} a_i x^i = 0 \text{ avec tous les}$ 

coefficients réels ,  $a_n \neq 0$ , et le naturel  $n \geqslant 2$ . Montrer que si ( n-1)  $a_{n-1}^2 - 2 \cdot n \cdot a_n a_{n-2} < 0$  alors l'équation n'a pas toutes ses racines dans  $\mathcal{R}$ .

#### Solution:

$$S = (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \dots + (x_1 - x_n)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_2 - x_n)^2 + \dots + (x_n - x_n)^2 =$$

$$+\frac{a_{n-2}}{a_n}(-2n) = \frac{1}{a_n^2} \left[ (n-1) a_{n-1}^2 - 2 n a_n a_{n-2} \right] < 0.$$

(On a noté  $x_1, x_2, \ldots, x_n$  les racines de l'équation .)

Il en résulte que l'équation donnée n'a pas toutes ses racines dans  $\mathcal{N}$  . puisque sinon il en résulterait que S > 0 .

Remarque : pour n=2 on obtient le résultat très connu que si le déterminant d'une équation de deuxième degré .  $\triangle < 0$  , alors l'équation a des racines complexes .

7.133 Résoudre le système suivant :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = c x_j, \quad 1 \le j \le n, \text{ avec } n \ge 2$$

$$i \ne j$$

#### Solution :

On écrit éxplicitement le système :

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n = \infty \\ x_1 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n = \infty \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} = \infty \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} = \infty \end{cases}$$

On fait la soustraction entre le première équation et chaque autre équation . On a :

$$-x_1 + x_k = \alpha x_1 - \alpha x_K$$
,  $2 \le K \le n$ .

On reports  $x_K = x_1 + x_1 - x_k$ ,  $2 \le K \le n$ , dans la première équation et on obtient : $(n-1)x_1 + (n-1)x_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_4 + x_4 + x_5 = x_4 + x_5 = x_4 + x_5 = x_5 =$ 

On détermine de façon analogue les inconnues  $x_2, \dots, x_n$ . La solution du système est :  $x_i = \frac{1}{n-1} \left[ x_1 + \dots + x_{i-1} - (n-2) x_i + x_{i+1} + \dots + x_n \right]$ ,  $1 \le i \le n$ .

7.134. Résoudre dans l'ensemble des nombres entiers le système :  $\begin{cases} -17x + 52 & y = 130 \\ 35x - 27y + 26 & z = 84 \end{cases}$ 

Solution: Résolvons en nombres entiers la première équation du système, qui est une équation diophantienne, sa solution générale sera:

(1) 
$$\begin{cases} x = 52 \ t - 26 \\ y = 17 \ t - 6 \ \text{avec} \ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En remplaçant les valeurs de x et y dans la deuxième équation , on a :

(2) 1361 t + 26 z = 832, avec (t, z) 
$$\in \mathbb{Z}^2$$
.

Colle-ci est reportée dans (1):

$$\begin{cases} x = 52 \cdot 26K - 26 \\ y = 17 \cdot 26K - 6 , \text{ avgc } K \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc , la solution générale du système initial est :

$$(x = 1352 \text{ K}-26)$$
  
 $y = 442 \text{ K}-6$   
 $z = -1361 \text{K} + 32$ , avec  $\text{K} \in \mathbf{7}$ .

Observation: La méthode qu'on a utilisée est la substitution a normale, qui s'utilise aussi pour résoudre en nombres réels.

7.135 • Soit un système linéaire homogène ayant pour matrice associée  $A \in \mathcal{M}$  (m,n; ()) , qui admet le rang r (A) < n • (Le rang d'une matrice c'est l'ordre du déterminant non nul le plus grand e: rait de cette matrice •) Montrer que le système admet des so. lutions entières non triviales •

Solution: On considère le système initial 
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times_{j} = 0$$
.

1 < i < m, avec tous les  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ . On met les coefficients au même dénominatur et on élimine celui-ci . On obtient un système qui a tous les coefficients entiers . On note r(A) = r < n ( conformément à l'hypothèse ). Si on élimine les équations secondaires alors il reste r équations principales . Résolvons normalement dans  $\mathbb{Z}^n$ , en appliquant la méthode de Cramer . Sans nuire à la généralité on suppose que  $x_1, \dots, x_r$  sont les variables principales .

Ainsi  $x_{r+1}, \dots, x_n$  seront les variables secondaires. Comme r < n, il existe au moins une variable secondaire. Les solutions réelles du système sont :

$$x_h = \frac{1}{\triangle} \sum_{t=r+1}^{n} b_{ht} x_t$$
,  $1 \le h \le r$ , avec tous les  $b_{ht}$  at  $\triangle$ 

entiers , où ∠ est le déterminant qui contient les colonnes 1,...,r et les lignes 1,...,r.

Si on pose  $x_t = \triangle \cdot K_t$ ,  $r + 1 \le t \le n$ , avec  $K_t \in \mathbf{Z}$  (paramètres) d'où

$$x_{h} = \sum_{t=t+1}^{n} b_{ht} K_{t}, 1 \leqslant h \leqslant r,$$

Il en résulta une solution entière r - indéterminée pour notre système . Si on donne des valeurs non nulles aux paramètres  $K_{r+1}$  ...,  $K_n$  on obtient une solution entière non triviale particulière .

7.136. Déterminer les matrices A et B d'ordre n telles que :  $(1 \times x^2 \dots x^{n-1})$ . A =  $(1 \times 1 + x^2 \dots 1 + x^{n-1})$  et

 $(1 1+x 1+x^2 ... 1+x^{n-1}) \cdot b = (1 x x^2 ... x^{n-1})$ 

- a) Calcular Am at Bm, pour m E //(/\*.
- b) Montrer que  $A^k B^e = B^e A^k$  et (AB)  $P(BA)^* \forall K, e, p \in I(/*.$
- c) Montrer que si  $\sum_{i=1}^{s} K_i = \sum_{i=1}^{s} \sum_{i=1}^{s} alors \prod_{i=1}^{s} A^{i} B^{i} =$

<sup>=</sup> I  $_{\rm n}$  ,  $^{\rm où}$  I  $_{\rm n}$  est la matrice unitaire d'ordre  $_{\rm n}$ ; et  $_{\rm i}$  ,  $_{\rm i}$   $\in$   $/\!(/^{\circ}$  .

Notons  $v = (1 \times x^2 \cdot ... x^{n-1} \cdot ... x^{n-1})$  of  $u = (1 \ 1 + x \ 1 + x^2 \cdot ... 1 + x^{n-1})$ .

En multipliant v par la première colonne de A nous obtenons :  $a_{11} + a_{21}x + ... + a_{n1} x^{n-1} = 1$ ,  $\sqrt[4]{x} \in \mathbb{R}$ . On fait x=0, ct il on résulte  $a_{11} = 1$  , donc  $a_{21}x + ... + a_{n1} x^{n-1} = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  ; c'est-à-dire que celui-ci est le polynôme nul parcequ'il a plus de n-1 racines ) ; d'où a<sub>21</sub>= ...= a<sub>n1</sub> = o.

On pultiplie v par la colonne j de  $\Lambda$  ( $2 \le j \le n$ ) et on obtient:  $a_{1j} + a_{2j}x + \cdots + a_{j-1,j}x^{j-2} + a_{jj}x^{j-1} + \cdots + a_{nj}x^{n-1} = 1 + x^{j-1},$  $\forall x \in \mathbb{P}$ .

Pour x=0 on trouve  $a_{1j} = 1$ . Donc  $a_{2j}x + ... + a_{j-1,j}x^{j-1} + (a_{j,j}-1)x^{j-1} + +$  $t_{\dots+a_{nj}}x^{n-1}=0$ ,  $\forall x\in \mathbb{R}$ , Cc polynôme, aussi, est nul, ainsi  $a_{2j}^{2} \cdots a_{j-1,j}^{2} a_{j+1,j}^{2} \cdots a_{j}^{2} = 0$  of  $a_{jj}^{-1} = 0$  ou  $a_{jj}^{-1} = 0$  avec 2j=...j=1,j j...,j 2<j<n . Il en résulte que A = 1 1 1...1 0 1 0...0

Soit B = 
$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{1j} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{2j} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{nj} & b_{nn} \end{pmatrix}$$
 •On multiplic u par la première co-

lonne de B, et on trouve:b<sub>11</sub>+b<sub>21</sub>+...+b<sub>n1</sub>\* b<sub>21</sub>x+...+b<sub>n1</sub>x<sup>n-1</sup>=1, x R

Pour x=0 , cela implique  $b_{11} + b_{21} + \cdots + b_{n1} = 1$  . L'on a aussi  $b_{21}x + \cdots + b_{n1}x^{n-1} = 0$  ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  . D'où  $b_{21} = \cdots = b_{n1} = 0$  .

En multipliant u par la colonne j de D , nous obtenons :  $b_{ij} + b_{2j} + \cdots + b_{nj} + b_{2j} \times + \cdots + b_{jj} \times^{j} + \cdots + b_{nj} \times^{n-1} = x^{j-1} , \forall x \in \mathbb{R}$ ,  $2 \le j \le n \quad \text{Si } x = 0 \quad \text{on trouve } b_{1j} + b_{2j} + \cdots + b_{nj} = 0 \quad \text{Donc}$   $b_{2j} \times + \cdots + b_{jj} \times^{j-1} + \cdots + b_{nj} \times^{n-1} = 0$ 

=  $x^{j-1}$  (===>  $b_{2j}x+\cdots+b_{j-1,j}x$  j-2 = (  $b_{jj}-1)x^{j-1}+\cdots+b_{nj}x^{n-1}$  = 0,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

La même chose :  $b_{2j} = \cdots = b_{j-1,j} = b_{j+1,j} = \cdots = b_{nj} = 0$  et  $b_{jj} = 1 = 0$  ou  $b_{jj} = 1$  . Comme  $b_{1j} + b_{2j} + \cdots + b_{nj} = b_{1j} + 1 = 0$   $\Longrightarrow$   $b_{1j} = -1; D \cdot où$ 

a) On montre par récurrence que A<sup>m</sup> =  $\begin{pmatrix} 1m \cdot \cdot \cdot m \cdot /n \\ 0 & 1 & 0 \cdot \cdot \cdot 0 \end{pmatrix}$ Le cas m=1 est évident .

On suppose la propriété vraic pour m, on la montre pour m+1:

$$A^{m+1} = A^{m} A = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & \cdots & m+1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do façon analogue on démontre que  $B^{m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\$ 

$$A^{K} B^{E} = \underbrace{A \cdot A}_{K} B \cdot B = \underbrace{A \cdot A}_{K-1} BA \quad \underbrace{B \cdot B}_{K-1} = B^{K} B^{E-1} = B^{2} A^{K} B^{E-2}$$

=...= 
$$B^{:} \in A^{K}$$
.  $AB = BA \Longrightarrow (AB)^{P} = (BA)^{P}$ .

$$(AB)^{t} = I_{n}^{t} = I_{n}$$
, où on a noté  $t = \sum_{i=1}^{s} K_{i} = \sum_{i=1}^{s} K_{i}$ .

7.137 • Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  avec  $a,b \in \mathbb{R}$  .

- 1) Calculer la matrice An, où n = //(/\*.
- 2) Discuter la limite :

$$\frac{\sum_{K=1}^{n} \det (A^{K})}{\det (\sum_{K=1}^{n} A^{K})}$$

# Solution:

I) On démontrera par raisonnement par récurrence que

$$A^{n} = \begin{pmatrix} n & \beta_{n} \\ \beta_{n} & \alpha_{n} \end{pmatrix}, \text{ avec} \approx n = \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{\sum_{i=0}^{n} c_{n}^{2i}} c_{n}^{2i} = \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{\sum_{i=0}^{n} c_{n}^{2i}} c_{n}^{2i}$$
 (1)

et 
$$\beta_n = \frac{\binom{n+1}{2}}{\binom{2i-1}{n}} c_n^{2i-1} a^{n-2i+1} b^{2i-1}$$
 (2)

où [x] représente la partie entière de x.

Le cas n=1 c'est évident . Supposons la propeiété vraid pour n , on démontre qu'elle est vraie aussi pour n+1.

i) Si n=2K, alors  $\frac{n+1}{2}$   $\neq$   $\frac{1}{2}$ , donc la deuxième somme de (3) est égale à zéro, et  $\frac{1}{2}$  =  $\left[\frac{n+1}{2}\right]$  il en résulte l'expression de  $\propto_{n+1}$  de (1).

ii) Si n= 2K+1 , alors  $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{Z}$  et la deuxième somme de (3) est égale à  $C_n^n$  a  $b^{n+1} = b^{n+1}$  , d'où résulte l'expression de n+1 de (1) parce que la première somme de (3) aura des termes de 1=0 jusqu'à  $1 = \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$ .

Aussi, il faut montrer que  $B_{n+1} = b \propto_n + a\beta_n = \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = \frac{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{\left[\frac{n+2}{2}\right]} = \frac{\left[\frac{n+2}{2}\right]}{\left[\frac{n+2}{2}\right]} = \frac{\left[\frac{n+2}{2}\right]}{\left[\frac{n$ 

$$= \frac{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{\sum_{i=1}^{n+1} \left(c_n^{2i-2} + c_n^{2i-1}\right) a^{n+1-2i+1} b^{2i-1} + \frac{\sum_{i=\frac{n+2}{2}} \left(c_n^{2i-2} + c_n^{2i-1}\right)}{\sum_{i=\frac{n+2}{2}} \left(c_n^{2i-2} + c_n^{2i-1}\right)} \cdot a^{n-2i+2} b^{2i-1}; (4)$$

i) Si n=2K + 1 , alors  $\frac{n+2}{2} \notin \mathbb{Z}$  et donc la douxième somme de (4) est nulle . Aussi  $\left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n+2}{2}\right]$ , d'où résulte l'expression de  $\mathbb{R}_{n+1}$  de (2) .

ii) Si n=2K , alors  $\frac{n+2}{2} \in \mathbb{Z}$  , d'où la deuxième somme de (4) est égale à  $c_n^{2 \cdot \frac{n}{2} + 2-2} = a^{n-2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} + 2-1} = b^{n+1}$ .

Amnsi que dans (4), si on fait l'addition entre les deux sommes : il en résulte que pour la première domme i prendre des valeurs de 1 jusqu'è  $\frac{n+2}{2} = \begin{bmatrix} \frac{n+2}{2} \end{bmatrix}$ , d'où résulte l'expression de  $\beta_{n+1}$  de (2).

2) 
$$\det (A^{K}) = x_{K}^{2} - \beta_{K}^{2} = x_{K}^{2} - x_{K}^{2} = x_{K}^{2} + x$$

$$= \sum_{1}^{n} (c \langle K^{-} \beta K \rangle) (c \langle K^{+} \beta K \rangle) = \sum_{1}^{n} (a-b)^{K} (a+b)^{K} = \sum_{1}^{n} (a^{2}-b^{2})^{K}$$

(c1) si 
$$a^2 - b^2 \neq 1$$
, alors  $\frac{n}{1} (a^2 - b^2)^{K} = (a^2 - b^2) (\frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2})^{\frac{n}{1}}$ ;

$$\frac{1}{1} A^{K} = \left( \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i}}{\sum_{i=1}^{n} \beta_{i}} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i} \right) = \frac{1}{1} A^{K}$$

$$= \left( \sum_{1}^{n} \alpha_{K} \right)^{2} - \left( \sum_{1}^{n} \beta_{K} \right)^{2} = \left( \sum_{1}^{n} \alpha_{K} - \sum_{1}^{n} \beta_{K} \right) \left( \sum_{1}^{n} \alpha_{K} + \sum_{1}^{n} \beta_{K} \right) \left( \sum_{1}^{n} \alpha_{K} - \sum_{1}^{n} \beta_{K} \right) = \left( \sum_{1}^{n} \alpha_{A} - \beta_{A} \right)^{K} + \sum_{1}^{n} \left( \alpha_{A} - \beta_{A} \right)^{N} + \sum_{1}^{n} \left( \alpha_{A} - \beta_{A} \right$$

# - Discussion

Les cas a

- A) Les conditions C1 . C2 et C3 sont ocomplies .
- B) Il existe au moins une commette de celles-ci qui n'est pas

accomplie 
$$\frac{1}{n}$$

A)  $\lim_{n \to \infty} \left( \frac{\sum_{a=b-1,(a+b-1)}^{n} (a^2-b^2)^{n}-1}{\sum_{a=b-1,(a+b-1)}^{n} (a^2-b^2)^{n}-(a-b)^{n}(a+b)^{\frac{n}{2}}} \right) = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ 

On a les sous-cas a

A.I. 
$$|a^2 - b^2|$$
, < 1

A.II. 
$$|a^2 - b^2| > 1$$

A.III.  $|a^2 - b^2| = 1$  = 1 === 2 parce que l'on a C1.

A.I. Admet les situations :

A.I.1. | a-b | <1 at | a+b | <1 ==> L=- 
$$\frac{(a-b-1)(a+b-1)}{a^2-b^2-1}$$

A.I.2. / la-b.//(1 et |a+b | > 1 ---> L=0

A.I.3. |a-b. | <1 et |a+b=-1, parce qu'on a C3. Il es résulte que la limite n'existe pas.

A.I.4. /|a-b, |>1 ct ||a+b| < 1 ===> L=0

A.I.5. |a-b| > 1 et |a+b| > 1 ( ce cas n'est pas possible. puisqu'il en résulterait  $b^2$   $b^2$  > 1, qui est en contradiction avec A.I.)

A.I.5. |a-b| > 1 et |a+b| =1 ( de mâme ce cas n'est pas possible ).

A.I.7. |a-b| = 1 et |a+b |<1 (====) a-b=-1 et |a+b, |<1. parce qu'on a C2 . Il en résulte que la limite n'existe pas .

A.I.8. |a-b| = 1 of |a+b| = 1 ces deux cas n'existent pas en A.I.9. |a-b| = 1 of |a+b| > 1 raison de A.I.

A.II. admet les situations a

A.II.1. |a-b.|>1 et |a+b.|>1 - L=  $\frac{(a-b-1)(a+b-1)}{a^2-b^2-1}$ .

$$\frac{1 - \frac{1}{(a^2 - b^2)^n}}{1 - \frac{1}{(a+b)^n} - \frac{5}{(a-b)^n} + \frac{1}{(a^2 - b^2)^n}} = \frac{(a-b-1)(a+b-1)}{a^2 - b^2 - 1}$$
A. II. 2. As the state of the state o

A.II.2. |a-b |>1 et |a+b |<1 ===>L = 0

A.II.3. |a-b |> 1 ot |a+b |=1 (----> 1/a-b/)> 1 ot a+b=-1 , parce qu'on a C3 «Il on réculte que la limite n'existe pas ... A.II.4. |a-b|=1 et |a+b|>1 (-----> |a-b|=-1 et |a+b|>1 , parce qu'on a C2 Il en résulte que la limite n'existe pas .

$$A.II.7. la-b | (1 ct.1a+b.1 = 1$$

A.II.6.  $\sqrt{a-b}/=1$  ct  $\sqrt{a+b}/\sqrt{1}$  ces quatre cas n'existent pas en A.II.7.  $\sqrt{a-b}/\sqrt{1}$  et  $\sqrt{a+b}/\sqrt{1}$  raison de A.I. A.II.8.  $\sqrt{a-b}/\sqrt{1}$  et  $\sqrt{a+b}/\sqrt{1}$ 

A.II.9. \a-b, \1 et \'a+b. \>1 ===> L=0.

A.III. Il en résulte : L = 
$$\frac{(a-b-1)(a+b-1)}{a^2-b^2-1} \lim_{n \to c^{\circ}} \frac{(-1)^n-1}{(-1)^n+1-(a-b)^n(a+b)^n}$$

Mais a-b 
$$\neq 0$$
 ct a+b  $= \frac{a^2-b^2}{a-b} = -\frac{1}{a+b}$ , donc

$$L = \frac{(a-b-1)(a+b+1)}{a^2 - b^2 - 1} \lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n - 1}{(-1)^n + 1 - (a-b)^n - (-\frac{1}{a-b})^n}$$

a-b ∉ {-1.1} en raison de C2 et puisque si a-b=-1 il en résulterait -1=  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = -(a+b)$ , c'est à dire a+b=1, contradiction avac C3.

A.III. admet les situations :

AIII.1. 
$$|a-b| < 1 \implies \frac{1}{a-b} > 1 \implies L=0$$
A.III.2.  $|a-b| > 1 \implies L=0$ 

A.III.3.;  $a-b = 1 \ = 2$  a-b=1 ou bien a-b=-1, qui n'est pas possible .

- B) Il existe au moins une condition d'entre C1, C2,ou C3 qui n'est pas accomplie .
- si la condition C1 n'est pas accomplie , alors  $a^2-b^2=1$  .

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \det(A^{K}) = n}$$

- si la condition C2 n'est pas accomplie , alors a-b=1 .

$$\frac{n}{\sum_{a=b}^{n}(a-b)^{K}}=n.$$

-si la condition C3 n'est pas accomplie , alors a+b=1 .

$$\sum_{1}^{n} (a+b)^{K} = n .$$

Analysons toutes les possibilités de ce cas .

B.I. a-b = 1 et  $a+b \neq 1$  / Il en résulte  $a^2 - b^2 \neq 1$ , a=b+1 et  $L = \lim_{n \to \infty} \frac{(a^2 - b^2) \left[ (a^2 - b^2)^n - 1 \right]}{a^2 - b^2 - 1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{a + b - 1}{(a + b) \left[ (a + b)^n - 1 \right]}$ 

$$= \frac{(a^2 - b^2)(a+b-1)}{(a+b)(a^2 - b^2 - 1)} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{(2b+1)^n - 1}{(2b+1)^n - 1} = 0.$$

D.II. a-b=1 ct a+b=1 ====>  $a^2 - b^2 = 1 ====> a=1$  ct b=0===> L= fin none

B.III. a-b  $\neq 1$  et a+b= 1 ====>  $a^2 - b^2 \neq 1$  , a=1-b ===>

$$= \frac{(a^2-b^2)(a-b-1)}{(a^2-b^2-1)(a-b)} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{(1-2b)^n-1}{(1-2b)^n-1} = 0$$

D.IV. a-b  $\neq$  1 ct a+b  $\neq$  1 ==>  $a^2$  -  $b^2$  1 cn raison de D).

L=lim 
$$\frac{a=b-1}{(a-b)[(a-b)^n-1]} \cdot \frac{a+b-1}{(a+b)[(a+b)^n-1]} \cdot n=$$

$$= \frac{(a-b-1)(a+b-1)}{a^2-b^2} \lim_{n \to 2^{a}} \frac{n}{(a^2-b^2)^n - (a-b)^n - (a+b)^n + 1} =$$

D.IV.1 a-b /1 et la+b/> 1 . En appliquant le théorème de Stolz - Césaro , on obtient :

L= 2(1-a) 
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(a+b)^n - (a-b)^n - 1} o$$

B.IV.2. | a-b | (1 et | a+b| = 1 (====) | a-b. | (1 et a+b= -1.

Ce cas n'existe pas parce qu'il en résulterait  $|a^2-b^2|$  (1, donc  $a^2 - b^2 \neq 1$ . Contradiction about D.IV.

B.IV.5 |a-b|=1 et |a+b| > 1 ccs cinq cas n'existent pas en raison de D).

B.IV.7. |a-b| > 1 et |a+b| > 1

B.IV.8./a-b, //1 et /a+b // 1 ===> L=0

B.IV.9., a-b, =1 ct /a+b), =1 (====> a-b=-1 ct a+b=-1 ===> a-1 ct b=o ===> la\_limito n'existe pas .

Et voilà , yous les cas sont étudiés :.

La discussion de limte est très longue, mais elle nécessite un bon arrangement des cas ( qui dépendent des paramètres réels act b).

7.138 . Soient  $a_0$ ,  $a_1$ ,..., $a_n$  des nombres réels ,  $a_n > 0$ ,  $n \in I(/...)$ On considère le polynôme  $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_n$  tel que : s'il existe  $a_i < 0$ ,  $1 \le i \le n-1$ , alors le premier coeffichent non  $\mathbf{a}_{i+K}$  ,  $1 \leq K \leq n-1$  , antériour à  $\mathbf{a}_i$  , vérific  $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{a}_i \neq \mathbf{a}_{i+K}$ .

Si  $\mathbf{x_1}$  ,..., $\mathbf{x_m} \in \mathcal{R}_+^*$  , déterminer le minimum de l'expression :

$$E(x_1,...,x_m) = \sum_{j=1}^{m} \left(P(x_j) + P(\frac{1}{x_j})\right) \text{ et le point } (x_1,...,x_n)$$

où se réalise ce minimum .

#### Solution :

Si x > 0 et i > j , alors  $x^i + \frac{1}{x^i} \times \frac{1}{x^i$ 

$$E(x_1,...,x_m) = \sum_{j=1}^{m} (a_n(x_j^n + \frac{1}{x_j^n}) + ... + a_1(x_j + \frac{1}{x_j}) + 2 a_0).$$

Soit F  $(x_j) = P(x_j) + P(\frac{1}{x_j}) = a_n(x_j^n + \frac{1}{x_j^n}) + \cdots + a_1(x_j + \frac{1}{x_j}) + 2 a_0$ 

Si  $a_i > 0$ ,  $1 \le i \le n-1$ , alors  $\min_{\substack{x \ y \in \mathbb{F}^+}} F(x_j) = 2 (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$  ct celui-ci est réalisé sculement pour  $x_j = 1$ .

S'il existe  $a_i < 0$ ,  $1 \le i \le n-1$ , alors de l'hypothèse du problème on tire  $|a_i| \le a_{i+K}$ ,  $1 \le K \le n-i$ , et pour les autres coefficients on a  $a_{i+1} = \cdots = a_{i+K-1} = 0$ . Donc  $a_{i+K} (x_j^{i+K} + \frac{1}{x_i^{i+K}}) + a_i (x_j^{i} + \frac{1}{x_i^{i}})$ 

$$= (a_{i+K} - |a_i|) \cdot (x_j^{i+j} + \frac{1}{i+K}) + |a_i| \cdot (x_j^{i+K} + \frac{1}{i+K} - x_j^{i} - \frac{1}{x_j^{i}}) \ge x_j$$

On troube que  $\neq$  min  $E(x_1, ..., x_m) = 2m (a_0 + a_1 + ... + a_n)$ , et celui- $x_j \in \mathbb{R}^n$ ,  $j \in \{1, ..., m\}$ 

ci se réalise sculement pour  $(x_1, \dots, x_m) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{m})$ 

#### 2.139 . Montrer que

- a) La somme des puissances d'ordre 2p+1 de 2K+1 nombres naturels consécutifs est divisible par 2K+1.
- b) La somme des puissances d'ordre 2p+1 de 2K nombres naturels consécutifs est divisible 2K si et seulement si p  $\gg$  1 et K est divisible par 2 .

#### Solution .

a) Soit  $S_1$  la somme des puissances d'ordre 2p+1 de 2K+1 naturels consécutifs . Les 2K+1 nombres naturels consécutifs constituent un système complet de restes modulo 2K+1 . D'où  $S_1 = 0^{2p+1} + 1^{2p+1} + 2^{2p+1} + \dots + K^{2p+1} + (K+1)^{2p+1} + \dots + (2K-1)^{2p+1} + (2K)^{2p+1} \pmod{2K+1}$ .

 $2K-i = -(i+1) \pmod{2K+1}$ , pour  $0 \le i \le K-1$ .

$$(2K-i)^{2p+1} = -(i+1)^{2p+1} \pmod{2K+1}, 0 \le i \le K-1.$$

Donc  $(2K)^{2p+1} = 1^{2p+1} \pmod{2K+1}$ 

$$(2K-1)^{2p+1} = -2^{2p+1} \pmod{2K+1}$$

$$(K+1)^{2p+1} = -K^{2p+1} \pmod{2K+1}$$

$$S_1 = 0+1^{2p+1}+2^{2p+1}+...+K^{2p+1}-K^{2p+1}-...-2^{2p+1}-1^{2p+1} = 0 \pmod{2k+1}$$
Donc  $S_1 : 2K+1$ .

b)Do même soit  $S_2$  la somme des puissances d'ordre 2p+1 de 2K naturels consécutifs . Les 2K nombres naturels consécutifs constituent un système complet de restes modulo 2K . D'où  $S_2 = 0^{2p+1} + 1^{2p+1} + 2^{2p+1} + \dots + (K-1)^{2p+1} + K^{2p+1} + (K+1)^{2p+1} + \dots + (2K-2)^{2p+1} + (2K-1)^{2p+1} \pmod{2K}$ .

Mais  $2K-i=-i \pmod{2K}$ , pour  $1 \le i \le K-1$ .

$$(2K-i)^{2p+1} = -i^{2p+1} \pmod{2K}, 1 \le i \le K-1.$$
Donc  $(2K-1)^{2p+1} = -1^{2p+1} \pmod{2K}$   
 $(2K-2)^{2p+3} = -2^{2p+1} \pmod{2K}$ 

$$(K+1)^{2p+1} = -(K-1)^{2p+1} \pmod{2K}$$
 $S_2 = 0+1$ 
 $2p+1 + 2^{2p+1} + ... + (K-1)^{2p+1} + K$ 
 $2p+1 - (K-1)^{2p+1} - ... - (K-1)^{2p+1} + K$ 
 $2p+1 - (K-1)^{2p+1} = K^{2p+1} \pmod{2K}$ 
 $S_2 = 0+1$ 
 $S_2 =$ 

7.140. Montrer que si a et m sont des entiers ,  $m \neq 0$ , alors  $(a^{l,m}(-a))$  (l,m(-1) | est divisible par m .

#### Solution :

- I) m est premier .
- a)  $a = M_m$ . Alors  $a^{\frac{1}{m}} a = M_m$ , et on en tire la cobclusion.
- b) a #M. On a . d'après le théorème de Fermat, a m. a=Mm.
- II) m n'est pas premier , m ≠o.
- a) | m = 4. Alors

$$E=(a^{\frac{1}{2}} - a)(\frac{1}{2} - a)(\frac{1}{2} - a)(\frac{1}{2} - a)(\frac{1}{2} - a) = 2a (a^{\frac{3}{2}} - 1)(mod 4).$$

Si a =  $M_{2}$ , il on résulte E= o (mod 4)

Si  $a = M_2 + 1$ , il en résulte  $a^3 - 1 = M_2$ , d'où  $E \equiv 0 \pmod{4}$ .

b) (m) ≠ 4. Donc, ∃a,b ∈ Z - {o,-1,+1} = |m|=|a|.|b|.

Sila |  $\neq$ | b; puisque | a | < | m| -1 , | b) < | m| -1 , il est clair que | a | et | b | se trouvent parmi les facteurs de (| m| -1)!, donc (| m| -1)! = 0 (mod m), d'où la conclusion .

Si | a  $\rightleftharpoons$  |b  $\end{Bmatrix}$ , puisque | m  $\not\models$  4 ct | a| < | m  $\not\models$  1, |b| < | m  $\not\models$  1, on a 2 |b  $\not\mid$  < | m  $\not\models$  1, ainsi | a | ct 2 | b  $\mid$  se trouvent parmi les facteurs

de (|m|-1)!, donc (|m|-1)! $\equiv$ o (mod m), donc  $E \equiv o$  (mod m).

Remarque: En II on a démontré l'assertion suivante : si  $m \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 2\}$ , alors  $(|m|-1)! \equiv 0 \pmod{m}$ .

./.

# -o- (T) I B L I O G R A P H I E -o-

- (2) Revista Matematica a Elevilor din Timisoara .
- (3) Stüntà si Tehnica , Bucarest .
- (4) Licariri, Craĭova.
- (5) Matématikai Lapok , Cluj-Napoca .
- (6) Les Annales de l'Université de Timisoara .
- (7) Buletinul stüntific si tehnic al Institutului Politehnic " TRAIAN VUIA " , Timisoara .
- (8) Las Annales de l'Université de Craïova .
- (9) W. Sierpinski- " 250 problèmes de théorie élémentaire des nombres ", Classiques Hachette, Paris, 1972;
- (10) D. Gerll , G. Girard " Les olympiades internationales de mathématique ", Classiques Hachette , Paris , 1976.